

Titre: Méthodes algébriques pour la reconstruction en tomographie à rayons X : application à des données cliniques

Auteur: David Gendron

Date: 2008

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Gendron, D. (2008). Méthodes algébriques pour la reconstruction en tomographie à rayons X : application à des données cliniques [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8333/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/8333/>

Directeurs de recherche:

Programme: Non spécifié

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODES ALGÈBRIQUES POUR LA RECONSTRUCTION EN
TOMOGRAPHIE À RAYONS X : APPLICATION À DES DONNÉES
CLINIQUES

DAVID GENDRON
INSTITUT DE GÉNIE BIOMÉDICAL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(GÉNIE BIOMÉDICAL)

AVRIL 2008



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 978-0-494-46051-1

Our file Notre référence

ISBN: 978-0-494-46051-1

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MÉTHODES ALGÈBRIQUES POUR LA RECONSTRUCTION EN
TOMOGRAPHIE À RAYONS X : APPLICATION À DES DONNÉES
CLINIQUES

présenté par: GENDRON David

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BERTRAND Michel, Ph.D., président

M. GOUSSARD Yves, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. BEAUDOIN Gilles, Ph.D., membre

REMERCIEMENTS

Ce travail m'a permis de gagner en maturité tant au niveau académique qu'au niveau personnel. J'ai pu aussi y développer de bons réflexes face à un problème de grande envergure dans un contexte de recherche scientifique. Je n'aurais jamais pu y arriver sans le support et l'intervention de certaines personnes, que je souhaite ici remercier.

En particulier, mon directeur de recherche, Yves Goussard, qui m'a permis de participer à l'avancement d'un projet stimulant et m'a guidé tout au long de sa réalisation.

Gilles Beaudoin au l'Hôpital Notre-Dame qui a été d'une aide précieuse pour l'obtention de renseignements indispensables auprès de Siemens ainsi que pour l'acquisition de données réelles.

Mes collègues de laboratoire, pour les moments précieux, l'entraide, et l'ambiance de travail agréable à laquelle ils ont contribué.

Le personnel des salles de radiologie cinq et six de l'Hôpital Notre-Dame qui ont pris le temps qu'il fallait pour que nos acquisitions soient réussies.

Les membres de mon jury qui prendront le temps de critiquer ce travail. La perfection n'étant pas de ce monde, toute critique constructive permet de très lentement tendre vers elle.

Enfin, merci à ma famille et mes amis qui m'ont toujours encouragé à continuer.

RÉSUMÉ

Nous souhaitons parvenir à une réduction des artéfacts de durcissement de rayon en tomographie à rayons X dans le but d'améliorer le diagnostic de resténose chez des patients ayant subi une angioplastie avec implantation d'une endoprothèse vasculaire (*stent*). En présence d'objets très atténuants telles les broches métalliques d'une endoprothèse vasculaire, les images reconstruites par la méthode des rétro-projections filtrées, utilisée dans les tomographes commerciaux, sont détériorées, parfois fortement, en particulier en périphérie de ces objets.

Des travaux antérieurs menés par Nathalie Menvielle ont montré qu'une réduction significative de ces artéfacts pouvait être obtenue en tenant compte du caractère polychromatique de la source de rayons X. La méthode passe par la résolution d'un problème inverse d'estimation et nécessite la minimisation, par des méthodes itératives, d'une fonction objectif non linéaire.

Cette méthode de reconstruction demande beaucoup de temps et d'espace mémoire de sorte que la validation n'a pu être effectuée jusqu'à ce jour que sur des données simulées de petite taille. Cela est principalement dû aux opérations de projection et de rétroprojection qui doivent être effectuées à de nombreuses reprises. La modélisation de ces opérations par le produit d'une matrice, dite de projection, par un vecteur respectivement à droite et à gauche permet d'améliorer leur performance, mais nécessite une grande quantité de mémoire.

Les travaux présentés ici visent à permettre, dans un premier temps, et à accélérer, dans un deuxième temps, la reconstruction d'images de taille clinique à partir de données simulées et réelles sous l'hypothèse d'une source monochromatique. La fonction objectif résultante est minimisée en utilisant une méthode du gradient conjugué non linéaire.

Nous avons atteint la première partie de cet objectif en tenant compte de l'invariance des paramètres géométriques du tomographe à certaines transformations.

Ainsi, une proportion importante des coefficients composant la matrice de projection s'avèrent redondants. La matrice est, de plus, structuralement très creuse. La mise en œuvre d'une méthode de stockage tirant profit de ces deux aspects a permis de réduire suffisamment l'encombrement mémoire dû à la matrice, rendant son stockage possible pour les problèmes de taille clinique.

Les principaux déterminants du temps de reconstruction restent cependant les opérations de projection et de rétroprojection qui doivent être effectuées à chaque itération. L'utilisation d'une méthode de recherche linéaire adaptée à la forme de notre critère et la mise en œuvre d'une méthode de préconditionnement basée sur une approximation circulante du hessien de notre fonction objectif ont permis d'obtenir des itérées de meilleure qualité, résultant en une convergence significativement plus rapide des méthodes de reconstruction.

Nous arrivons ainsi à reconstruire en quelques minutes une image à partir de données réelles de meilleure qualité visuelle que celles reconstruites par la méthode des rétroprojections filtrées.

Ce pas franchi, nous tentons actuellement d'appliquer ces méthodes à la reconstruction polychromatique d'images cliniques. Nous nous dirigeons également vers la mise en œuvre de méthodes permettant de reconstruire des volumes de données tridimensionnels provenant d'acquisitions hélicoïdales multibarrettes.

ABSTRACT

We aim at reducing beam hardening and metal streak artifacts on X-ray tomography reconstructed images in order to improve in-stent restenosis assessment. In the presence of highly attenuating objects such as the pins of a stent, the images reconstructed through filtered backprojection are deteriorated, sometimes greatly, particularly near the boundaries of those objects.

Previous work by Nathalie Menvielle showed that a significant reduction of such artifacts can be achieved by modeling the polychromatic nature of the X-ray source. The method requires solving an inverse problem through minimization of a non-linear objective function.

This reconstruction method requires a very long computation time and a huge memory space such that its validation could only be made on small simulated data sets. This is mostly due to the projection and backprojection operations that need to be performed numerous times. Performing those operations as products of vectors with a so-called projection matrix leads to a significant speed-up, but still requires a great amount of computer memory.

The work presented herein aims at making possible the reconstruction of clinical-size images from simulated and real data under the assumption of a monochromatic source of X-rays. An acceleration of the reconstruction methods is also sought for. The resulting objective function is minimized using a non-linear conjugate gradient method.

This objective is fulfilled by pointing out that the geometry of commercial tomographs is invariant to some geometrical transformations. The coefficients of the projection matrix can thus be highly redundant. The matrix is also very sparse and exhibits a highly structured pattern. The design of a new sparse matrix storage scheme accounting for both properties leads to a sufficient decrease in memory requirements so as to be able to store it for clinical-size problems.

Reconstruction times are still mainly determined by the computation time of projections and backprojections that need to be performed at each iteration. Taking advantage of a line search method and a preconditioner tailored to the structure of our objective function resulted in an increased convergence speed for the reconstruction method.

It is now possible to reconstruct, in minutes, visually better images from clinical data those obtained through filtered backprojection.

This being done, we are now working to apply those methods to polychromatic reconstruction of clinical images. We are also moving towards the design of fully 3D reconstruction methods taking account for multislice spiral datasets.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	ix
LISTE DES FIGURES	xiv
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xx
LISTE DES TABLEAUX	xxiii
LISTE DES ANNEXES	xxv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 PRÉSENTATION DU PROBLÈME	8
1.1 Tomographie à rayons X	8
1.1.1 Évolution technologique	10
1.1.2 Projections et transformée de Radon	13
1.1.2.1 Projections à rayons parallèles : la transformée de Radon	13
1.1.2.2 Projections avec des rayons en éventail	15
1.1.3 Reconstruction à partir des projections	18
1.1.3.1 Théorème de la tranche centrale de Fourier	18
1.1.3.2 Méthode des rétroprojections filtrées	20
1.1.3.3 Reconstruction algébrique	22
1.1.4 Formation des mesures	27

1.1.5	La reconstruction en tant que problème d'estimation	30
1.1.5.1	Méthodologie de l'estimation	30
1.1.5.2	Problème inverse pour la reconstruction tomogra- phique	32
1.1.5.3	Régularisation	34
1.2	Optimisation	41
1.2.1	Conditions d'optimalité	42
1.2.1.1	Condition nécessaire du premier ordre	43
1.2.1.2	Condition nécessaire du second ordre	43
1.2.1.3	Condition suffisante du second ordre	43
1.2.2	Méthodes à régions de confiance	44
1.2.3	Méthodes à directions de descente	45
1.2.3.1	Conditions de convergence	46
1.2.3.2	Méthodes de la plus forte pente et de Newton . . .	48
1.2.3.3	Gradient conjugué	51
1.2.3.4	Gradient conjugué préconditionné	54
1.2.3.5	Gradient conjugué non linéaire	57
1.2.3.6	Méthode de Newton avec gradient conjugué	61
1.2.4	Recherche linéaire	61
1.2.4.1	Recherche linéaire de Moré-Thuente	62
1.2.4.2	Méthodes de Labat	66
1.2.5	Méthode employée	67
1.3	Problématique	68
1.4	Conclusion	69
CHAPITRE 2	PROJECTION ET RÉTROPROJECTION	71
2.1	Hypothèses et conventions géométriques	73
2.2	Redondance des projections	75

2.3	Structure des coefficients	79
2.4	Stockage sans pertes de matrices creuses	81
2.4.1	Format par coordonnées	82
2.4.2	Compression par colonnes	83
2.4.3	Compression par lignes	84
2.4.4	Format Ellpack-Itpack	85
2.5	Méthodes mises en œuvre	86
2.5.1	Structures pour le stockage des lignes de la matrice	86
2.5.2	Plateforme de développement	90
2.5.3	Accès aux données d'un bloc	91
2.5.4	Génération de la matrice	91
2.5.4.1	Identification des lignes redondantes	93
2.5.4.2	Allocation de la structure	93
2.5.4.3	Paramétrisation des rayons	94
2.5.4.4	Calcul des coefficients d'une ligne de la matrice	95
2.5.5	Produits matrice-vecteur	97
2.5.5.1	Position des redondances	99
2.5.5.2	Angles particuliers	102
2.5.6	Sauvegarde et chargement	103
2.6	Variations par rapport à la géométrie de base	103
2.6.1	Décalage du détecteur	104
2.6.2	Source volante	106
2.6.2.1	Source volante angulaire	107
2.6.2.2	Source volante longitudinale	109
2.7	Méthode mise en œuvre avec décalage et source volante	110
2.7.1	Décalage du détecteur	111
2.7.2	Source volante	112
2.7.2.1	Redondance des projections avec source volante	112

2.7.2.2	Paramétrisation des rayons	113
2.7.2.3	Produits matriciels	115
2.8	Conclusion	116
CHAPITRE 3 PRÉCONDITIONNEMENT		118
3.1	Introduction	118
3.2	Conditionnement	119
3.3	Différentes formes de préconditionnement	122
3.4	Propriétés de notre problème concernant le préconditionnement . .	123
3.5	Stratégies générales de préconditionnement	126
3.5.1	Préconditionneurs circulants	127
3.6	Approximation circulante proposée	129
3.6.1	Terme d'adéquation aux données	130
3.6.2	Terme de régularisation	132
3.6.2.1	Expressions efficaces pour le calcul de $\Lambda_p^{(m)}$	133
3.7	Préconditionneur de Fessler et Booth	134
3.7.1	Problème et critère étudiés	134
3.7.2	Méthode proposée, adaptée à notre problème	136
3.7.3	Calcul des coefficients de Fourier pour $\tilde{\eta}_k$	139
3.8	Conclusion	140
CHAPITRE 4 SIMULATION ET RÉSULTATS		142
4.1	Projection et rétroprojection	143
4.1.1	Efficacité de stockage	144
4.1.2	Temps de calcul	148
4.1.2.1	Comparaison des deux méthodes mises en œuvre .	148
4.1.2.2	Produit matrice-vecteur par rapport à la projection	150
4.1.3	Conclusion	151
4.2	Accélération des méthodes	152

4.2.1	Génération de données synthétiques	152
4.2.2	Détermination des paramètres de régularisation	154
4.2.3	Évaluation des méthodes de calcul du pas	156
4.2.4	Évaluation du préconditionneur	162
4.2.4.1	Approximation circulante de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$	162
4.2.4.2	Approximation circulante du terme de régularisation	165
4.2.5	Évaluation du préconditionneur de Fessler et Booth	169
4.2.6	Conclusion	173
4.3	Capacité de reconstruction des données réelles	174
4.3.1	Reconstruction d'une image à partir de données réelles	174
4.3.2	Comparaison de nos images et celles de Siemens	177
4.3.2.1	Conversion des reconstructions en unités Hounsfield	177
4.3.3	Validation de la reconstruction	178
4.3.3.1	Résolution et niveau de bruit	178
4.3.3.2	Validation de la géométrie du décalage et de la source volante	181
4.3.3.3	Reconstruction du coefficient d'atténuation	183
4.3.3.4	Détection de petits objets et de faibles contrastes	185
4.3.4	Convergence de la reconstruction de données réelles	187
4.3.5	Conclusion	188
CONCLUSION		190
RÉFÉRENCES		193
ANNEXES		196

LISTE DES FIGURES

FIG. 1	Artéfacts métalliques pour différentes orientations d'une endoprothèse vasculaire en Nitinol par rapport à l'axe de rotation de la source : parallèle 1(a), 45 degrés 1(b) et perpendiculaire 1(c).	5
FIG. 1.1	Illustration du principe de la projection avec rayons parallèles.	14
FIG. 1.2	Sinogramme obtenu en projetant le fantôme de Shepp et Logan.	15
FIG. 1.3	Illustration du principe de la projection avec rayons en éventail équiangulaire.	17
FIG. 1.4	Allure des fonctions de pénalisation L_2L_1 (trait plein) par rapport à une fonction quadratique (trait pointillé) : une branche d'hyperbole 1.4(a) et une fonction de Huber 1.4(a). Dans les deux cas, $\delta = 1$. Pour avoir une pente asymptotiquement identique, la branche d'hyperbole a été multipliée par 2δ	40
FIG. 2.1	Conventions et notations adoptées pour la matrice de projection.	74
FIG. 2.2	Illustration des conditions assurant l'invariance par symétrie.	78
FIG. 2.3	Illustration des conditions assurant l'invariance par rotation.	79
FIG. 2.4	Illustration d'une ligne de la matrice de projection sous forme d'une image.	80
FIG. 2.5	2.5(a) : Configuration du système pour une source à θ_s et à $-\theta_s$ obtenue par symétrie par rapport à l'axe x . 2.5(b) : Configuration du système pour une source à l'angle θ_s et à $-\theta_s$ obtenue par rotation. L'orientation de la barrette de détecteurs est indiquée par une flèche.	100
FIG. 2.6	Configuration obtenue à la suite d'une rotation d'un angle π .	100

FIG. 2.7	Projections opposées sans décalage du détecteur 2.7(a) et avec décalage 2.7(b).	105
FIG. 2.8	Ensemble des rayons (minces) pour une géométrie en éventail avec 15 projections et 20 détecteurs sans décalage 2.8(a) et avec décalage 2.8(b). Les rayons sont espacés d'un angle $\pi/30$. La région représentée est un carré de 500 mm de côté. La source et la barrette de détecteurs sont respectivement à une distance de 570 mm et 470 mm de l'isocentre.	105
FIG. 2.9	Illustration du tube Straton de Siemens. Vue de profil 2.9(a) et vue de face 2.9(b).	107
FIG. 2.10	Géométrie de l'éventail pour une source volante angulaire 2.10(a). Rayons de part et d'autre de l'isocentre en considérant une approximation de petits angles pour le calcul de l'angle de la déviation 2.10(b).	108
FIG. 2.11	Géométrie de l'éventail pour une source volante longitudinale 2.10(a). Rayons de part et d'autre de l'isocentre en considérant une approximation de petits angles pour le calcul de la longueur de la déviation du point focal 2.10(b).	109
FIG. 2.12	Illustration du calcul de l'angle et de la distance entre le rayon et l'isocentre.	114
FIG. 3.1	Illustration du concept de conditionnement pour une forme quadratique sur un domaine bidimensionnel.	121
FIG. 3.2	Illustration de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ et de son inverse pour une image de taille 16×16	125
FIG. 4.1	Nombre de coefficients emmagasinés 4.1(a), nombre d'éléments de contrôle 4.1(b) et espace total occupé par la matrice 4.1(c) sans source volante ni décalage lorsqu'on en emmagasine toutes les lignes.	145

FIG. 4.2	Nombre de coefficients emmagasinés 4.2(a), nombre d'éléments de contrôle 4.2(b) et espace total occupé par la matrice 4.2(c) sans source volante ni décalage lorsqu'on en emmagasine un huitième des lignes.	146
FIG. 4.3	Fantôme de Shepp-Logan constitué d'os, de tissus mous et d'air, utilisé pour la génération de données de simulation. . .	153
FIG. 4.4	Erreur quadratique moyenne pour la reconstruction du fantôme de Shepp-Logan avec différentes valeurs de λ , pour cinq niveaux de bruit.	155
FIG. 4.5	Reconstructions à partir de données simulées bruitées pour des RSB de 20 dB et de 40 dB, avec des valeurs de λ près de la valeur minimisant l'erreur quadratique moyenne. 4.5(a), 4.5(b) et 4.5(c) : reconstructions pour un RSB de 20 dB, avec $\lambda = 1, 2$ et 5 respectivement. 4.5(d), 4.5(e) et 4.5(f) : reconstructions pour un RSB de 40 dB, avec $\lambda = 0,1, 0,2$ et 0,5 respectivement.	157
FIG. 4.6	Convergence du gradient conjugué non linéaire avec les différentes méthodes de calcul du pas pour la reconstruction non régularisée d'un jeu de données non bruitées. Valeur du critère en fonction du nombre d'itérations 4.6(a), valeur du critère en fonction du temps 4.6(b), norme du gradient en fonction du nombre d'itérations 4.6(c) et norme du gradient en fonction du temps 4.6(d).	158

FIG. 4.7	Convergence du gradient conjugué non linéaire avec les différentes méthodes pour le calcul du pas pour la reconstruction régularisée, avec $\lambda = 2$, d'un jeu de données bruitées avec un RSB de 20 dB. Valeur du critère en fonction du nombre d'itérations 4.7(a), valeur du critère en fonction du temps 4.7(b), norme du gradient en fonction du nombre d'itérations 4.7(c) et norme du gradient en fonction du temps 4.7(d).	159
FIG. 4.8	Vue rapprochée sur la valeur de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations et du temps avec les différentes méthodes pour le calcul du pas pour la reconstruction régularisée, avec $\lambda = 2$, d'un jeu de données bruitées avec un RSB de 20 dB. Valeur du critère en fonction du nombre d'itérations 4.8(a), valeur du critère en fonction du temps 4.8(b).	160
FIG. 4.9	Convergence du gradient conjugué non linéaire pour la reconstruction de données simulées non bruitées avec différences approximations circulantes de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Valeur de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations 4.9(a) et du temps 4.9(b). Norme du gradient en fonction du nombre d'itérations 4.9(c) et du temps 4.9(d).	164
FIG. 4.10	Valeur de la fonction objectif pour la reconstruction préconditionnée avec des approximations circulantes de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ au centre de l'image, et pour 10, 100 ou 1000 colonnes pour les itérations 45 à 50.	165

FIG. 4.11	Convergence du gradient conjugué pour la reconstruction régularisée par une fonction L_2L_1 avec $\lambda = 2$ de données simulées avec un RSB de 20 dB pour différences approximations circulantes du hessien. Valeur de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations 4.11(a) et du temps 4.11(b). Norme du gradient en fonction du nombre d'itérations 4.11(c) et du temps 4.11(d).	167
FIG. 4.12	Valeur de la fonction objectif pour la reconstruction préconditionnée à l'aide des deux préconditionneurs de Fessler et Booth, pour divers nombres K d'approximations circulantes, ainsi que sans préconditionnement et avec le préconditionneur circulant au point courant. 4.12(a) : \mathbf{M}_1 en fonction du nombre d'itérations. 4.12(b) : \mathbf{M}_1 en fonction du temps. 4.12(c) : \mathbf{M}_2 en fonction du nombre d'itérations. 4.12(d) : \mathbf{M}_2 en fonction du temps.	170
FIG. 4.13	Norme du gradient pour la reconstruction préconditionnée à l'aide des deux préconditionneurs de Fessler et Booth, pour divers nombres K d'approximations circulantes, ainsi que sans préconditionnement et avec le préconditionneur circulant au point courant. 4.13(a) : \mathbf{M}_1 en fonction du nombre d'itérations. 4.13(b) : \mathbf{M}_1 en fonction du temps. 4.13(c) : \mathbf{M}_2 en fonction du nombre d'itérations. 4.13(d) : \mathbf{M}_2 en fonction du temps.	171
FIG. 4.14	Images reconstruites par Siemens pour les trois modules du fantôme <i>Catphan 600</i> . Les modules CTP404 et CTP528 ont été représentés sans effectuer de fenêtrage. Le module CTP515 est représenté sur une fenêtre allant de 0 HU à 100 HU. . .	176

FIG. 4.15	Reconstructions du module CTP528 à partir de données réelles, avec des valeurs de λ de part et d'autre de 0,2. Les figures 4.15(b), 4.15(c) et 4.15(d), dans l'ordre, correspondent aux reconstructions avec $\lambda = 0,1, 0,2$ et $0,5$. La série de barrettes la plus large représentée est la troisième du fantôme.	179
FIG. 4.16	Profil du coefficient d'atténuation en HU pour la colonne du centre du module CTP528 avec la méthode proposée et celle de Siemens. Les figures 4.16(a), 4.16(b) et 4.16(c), dans l'ordre, correspondent aux reconstructions avec $\lambda = 0,1, 0,2$ et $0,5$	180
FIG. 4.17	Images reconstruites pour le module CTP528 avec décalage et source volante 4.17(a), sans décalage, avec source volante 4.17(b), avec décalage, sans source volante 4.17(c), sans décalage ni source volante 4.17(d).	182
FIG. 4.18	Images du module CTP404 reconstruites par Siemens 4.18(a), et par nos méthodes 4.18(b).	183
FIG. 4.19	Profil du coefficient d'atténuation en HU pour la colonne 258 de la reconstruction avec la méthode proposée et de celle de Siemens.	184
FIG. 4.20	Images du module CTP515 reconstruites par Siemens 4.20(a) et par nos méthodes 4.20(b).	185

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

Notation

x	Quantité scalaire.
\mathbf{x}	Quantité vectorielle.
x_j ou $[\mathbf{x}]_j$	Composante d'indice j d'un vecteur.
\mathbf{e}_j	Vecteur de base dont la composante d'indice j vaut 1.
\mathbf{A}	Matrice.
a_{ji}	Coefficient à la ligne j et à la colonne i de la matrice \mathbf{A} .
$\text{diag}\{\mathbf{x}\}$	Matrice diagonale dont les composantes sont les composantes du vecteur \mathbf{x} .
$\lfloor \rfloor$ et $\lceil \rceil$	Valeur entière inférieure et supérieure.
$\nabla f(x)$	Gradient de la fonction $f(x)$.
$\nabla^2 f(x)$	Hessien de la fonction $f(x)$.
$\mathcal{F}\{\}$	Transformée de Fourier 1D.
\mathcal{F}	Opérateur matriciel de la transformée de Fourier 1D.
$\mathcal{F}_2\{\}$	Transformée de Fourier 2D.
\mathcal{F}_2	Opérateur matriciel de la transformée de Fourier 2D.
$\mathcal{R}\{\}$	Opérateur de la transformée de Radon.
\hat{x}	Estimée d'une variable.
$\text{rect}_{[-\frac{w}{2}, \frac{w}{2}]}$	Fonction rectangle centrée et de largeur w .
X	Variable aléatoire (en italique).
\mathbf{X}	Vecteur aléatoire (en italique).
\mathcal{P}_O	Distribution suivant une loi de Poisson.
\mathcal{N}	Distribution suivant une loi normale.

Symboles physiques

μ	Coefficient d'atténuation en cm^{-1} .
n_0	Nombre de photons émis par une source.
n	Nombre de photons détectés.

Symboles liés à la géométrie du tomographe

θ_p	Angle de projection.
θ_s	Position angulaire de la source.
θ_f	Angle d'un rayon au sein d'un éventail.
θ_r	Angle d'un rayon.
r	Distance entre un rayon et l'isocentre.
R_F	Distance de la source (point focal) à l'isocentre.
R_D	Distance du centre du détecteur à l'isocentre.
R_{FD}	Distance entre le tube et le centre du détecteur.

Symboles liés aux modèles algébriques

\mathbf{A}	Matrice de projection.
C	Critère à minimiser.
R	Fonction de régularisation.
λ	Poids de la régularisation.
ψ	Fonction de pénalisation.
δ	Paramètre d'échelle pour la régularisation par une fonction de

	pénalisation L_2L_1 .
$\mathbf{D}^{(\mathbf{m})}$	Matrices de différences.
w_m	Facteur d'influence de la pénalisation des différences $\mathbf{D}^{(\mathbf{m})}$.
$n_p \in [1, N_p]$	Indice des projections dans un sinogramme.
$n_d \in [1, N_d]$	Indice des détecteurs au sein d'une projection.
$n_{fs} \in [1, N_{fs}]$	Indice du point focal avec une source volante.
$i \in [1, I]$	Indice des composantes du sinogramme sous forme d'un vecteur.
$n_r \in [1, N_r]$	Indice de la rangée d'une image.
$n_c \in [1, N_c]$	Indice de la colonne d'une image.
$j \in [1, J]$	Indice des échantillons d'une image sous forme vectorielle.

Symboles liés à l'optimisation

\mathbf{d}_k	Direction de descente à l'itération k .
\mathbf{p}_k	Direction préconditionnée à l'itération k .
α_k	Longueur du pas à l'itération k .
β	Paramètre de conjugaison pour la méthode du gradient conjugué.
$\mathcal{K}(\mathbf{H})$	Nombre de conditionnement de la matrice \mathbf{H} .
\mathbf{M}	Matrice de préconditionnement.
Λ	Valeurs propres pour l'approximation circulante de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.
Λ_p	Valeurs propres pour l'approximation circulante de la fonction de pénalisation.

LISTE DES TABLEAUX

TAB. 2.1	Conditions pour que la matrice de projection soit invariante par rapport à certaines transformations, et intervalle d'angles de la source pour lesquels on doit calculer les coefficients.	77
TAB. 2.2	Bloc de l'exemple stocké par coordonnées.	82
TAB. 2.3	Matrice creuse compressée par colonnes.	83
TAB. 2.4	Matrice creuse compressée par lignes.	84
TAB. 2.5	Bloc de l'exemple emmagasiné dans le format Ellpack-Itpack.	85
TAB. 2.6	Valeurs emmagasinées pour la méthode à segments de longueur fixe. Noter la présence de trois zéros.	89
TAB. 2.7	Valeurs emmagasinées pour la méthode à segments de longueur variable.	89
TAB. 2.8	Paramètres pour la construction de la matrice de l'exemple.	92
TAB. 2.9	Intersections à l'intérieur de l'objet en ordre croissant de y	95
TAB. 2.10	Position d'un échantillon de l'image après une transformation.	101
TAB. 2.11	Position d'un échantillon dans les projections après une transformation.	102
TAB. 2.12	Position d'un échantillon dans les projections après une transformation en tenant compte de la source volante.	116
TAB. 4.1	Temps de calcul pour les opérations impliquant une matrice dont on a stocké toutes les lignes pour une image de taille 512×512	148
TAB. 4.2	Temps de calcul pour les opérations impliquant une matrice dont on a stocké un huitième des lignes pour une image de taille 512×512	149

TAB. 4.3	Valeur du paramètre de régularisation λ minimisant approximativement l'erreur quadratique moyenne pour différents niveaux de bruit.	154
TAB. 4.4	Temps nécessaire au calcul des approximations circulantes de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ avec différents nombres de colonnes.	166
TAB. 4.5	Nombre de cylindres détectés et produit de la taille du plus petit cylindre détecté par son niveau de contraste pour les trois séries extérieures sur les images reconstruites par Siemens et par nos programmes.	186
TAB. I.1	197
TAB. I.2	198

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	PARAMÈTRES DES APPAREILS SOMATOM SENSATION 16 ET 64 POUR L'ACQUISITION ET LA RECONSTRUC- TION DE DONNÉES RÉELLES	196
I.1	Paramètres géométriques	196
I.2	Protocole d'acquisition	196
I.3	Format des données brutes de Siemens	197
I.4	Recalage des données brutes avant la reconstruction	199
ANNEXE II	CRITÈRE, GRADIENT, HESSIEN	201
ANNEXE III	STRUCTURES EN LANGAGE C POUR LA MATRICE DE PROJECTION	203

INTRODUCTION

Problématique médicale

Les maladies cardio-vasculaires sont des causes de mortalité de plus en plus préoccupantes. La dégradation progressive normale du système circulatoire chez une population vieillissante, combinée à de mauvaises habitudes de vie, à la sédentarité, à une alimentation déficiente, au tabagisme, ou causée par certaines maladies, a fait augmenter le nombre de décès reliés à ces causes. Selon Statistiques Canada, en 1997, les maladies du cœur figuraient au deuxième rang des causes de décès, tout juste après le cancer (Statistiques Canada, 2005).

Nous nous intéressons au problème de la sténose artérielle, c'est-à-dire du rétrécissement d'une artère. Plusieurs facteurs peuvent y contribuer, dont l'accumulation de matières adipeuses et de cellules endothéliales sur la paroi artérielle. Une option de traitement dans ce cas est l'angioplastie, soit le gonflement d'un ballonnet afin de dilater le vaisseau et rétablir le flot sanguin. Cette intervention occasionne de régulières complications conduisant à une nouvelle obstruction du vaisseau. Dans ces cas, il est possible d'avoir recours à l'implantation d'une endoprothèse vasculaire (*stent*), filet métallique qu'on déploie à l'intérieur de l'artère. Ce dernier applique une pression sur la paroi de l'artère, empêchant sa constriction, mais pas la formation d'une plaque d'athérome pouvant éventuellement l'obstruer. Un suivi médical est alors nécessaire afin de détecter, à temps, une éventuelle resténose.

Suivi des patients

Plusieurs méthodes sont actuellement disponibles pour effectuer ce suivi. La plus courante est l'angiographie par cathéter. Il s'agit d'un examen radiologique où le patient est placé entre une source de rayons X et un plan détecteur. Un cathéter est inséré à l'intérieur du vaisseau à observer et permet d'y injecter un agent de contraste radioopaque. Cet agent permet de faire apparaître clairement les vaisseaux sanguins et d'y diagnostiquer une sténose.

Cette intervention est invasive. En effet, une incision est nécessaire pour l'insertion du cathéter. De plus, l'examen peut durer plusieurs minutes, soumettant le patient à des doses importantes de radiation. Enfin, le produit de contraste à base d'iode administré est néphrotoxique et peut entraîner des complications au niveau des reins.

Le diagnostic de resténose peut également être effectué par échographie endovasculaire (*Intravascular Ultrasound (IVUS)*). Cette méthode nécessite l'insertion d'un cathéter pourvu d'une sonde échographique à son extrémité. Elle présente l'avantage de n'avoir recours à aucun agent de contraste, mais demeure invasive et nécessite le recours à la radioscopie pour le guidage du cathéter.

Il pourrait être souhaitable de réaliser le même type d'examen à l'aide de la tomographie à rayons X. Cette façon de procéder est plus rapide qu'un examen par cathéter et ne nécessite aucune incision. Un agent de contraste à base d'iode doit néanmoins être administré pour faire apparaître le système vasculaire. Nous verrons cependant, dans les prochaines sections, que la reconstruction tomographique, telle qu'elle est effectuée de nos jours, ne permet pas d'obtenir des images dont la qualité est suffisante pour effectuer le diagnostic d'une resténose à l'intérieur de l'endoprothèse de manière précise.

Tomographie à rayons X

Dans les grandes lignes, la tomographie à rayons X consiste à positionner le patient entre une source de rayons X et un système de détection. En traversant le patient, une partie du rayonnement est atténuée. Le nombre de photons ayant traversé le patient nous donne des informations sur ce qui se trouve entre la source et le détecteur. Cette information est reliée au coefficient d'atténuation, lui-même lié à la densité des matériaux traversés.

La prise de projections sous différents angles permet de reconstruire la distribution spatiale du coefficient d'atténuation et donc de reproduire une image d'une coupe à travers le patient.

La reconstruction de l'image est effectuée par un ordinateur. La méthode utilisée est une généralisation de l'algorithme dit des rétroprojections filtrées. Cette dernière permet de reconstruire rapidement des images de grande qualité dans la plupart des cas.

Artéfacts métalliques

Les images obtenues par les méthodes de reconstruction tomographique utilisées actuellement sont toutefois entachées d'artéfacts en présence d'objets métalliques, tels que les vis orthopédiques ou les endoprothèses vasculaires. Ces artéfacts peuvent parfois être suffisamment importants pour dégrader significativement la qualité de l'image et rendre son interprétation difficile.

Les méthodes mises en œuvre dans les tomographes commerciaux sont basées sur une hypothèse de linéarité de l'atténuation en fonction de la distance parcou-

reue dans un matériau homogène. Cette hypothèse s'éloigne d'autant de ce que prédit la physique de l'atténuation des rayons X que les matériaux rencontrés sont atténuants.

Cette hypothèse serait valable si la source n'émettait que des rayons d'une seule énergie. Or, la source émet des photons d'énergies distribuées sur un spectre assez large. Dans les faits, les basses énergies sont atténuées plus rapidement que les hautes énergies, de sorte qu'un durcissement du faisceau X se produit au fil de son parcours à travers le patient. Le déplacement de son contenu spectral vers les hautes énergies le rend ainsi de plus en plus difficile à atténuer.

La non-prise en compte de ce phénomène dans la reconstruction cause divers types d'artéfacts dans les images reconstruites. Par exemple, les métaux étant très atténuants, ils amplifient ce phénomène de durcissement. On assiste ainsi à l'apparition d'artéfacts en stries sur les images en présence de tels matériaux.

De tels artéfacts sont observés sur la figure 1, provenant d'une étude sur l'intensité des artéfacts pour différentes orientations d'une endoprothèse vasculaire en Nitinol (Létourneau-Guillon et al., 2004). Les deux premières images proviennent d'une reconstruction volumique. Elles sont alors la combinaison de plusieurs coupes axiales, chacune comprenant peu de métal. L'image de droite est la reconstruction d'une seule coupe axiale. Cette dernière est fortement détériorée par la présence d'une grande quantité de métal.

Il a été démontré empiriquement qu'on peut réduire de manière importante la présence de ces artéfacts en tenant compte de la nature polychromatique de la source de rayonnement (De Man et al., 2001; Elbakri and Fessler, 2002).

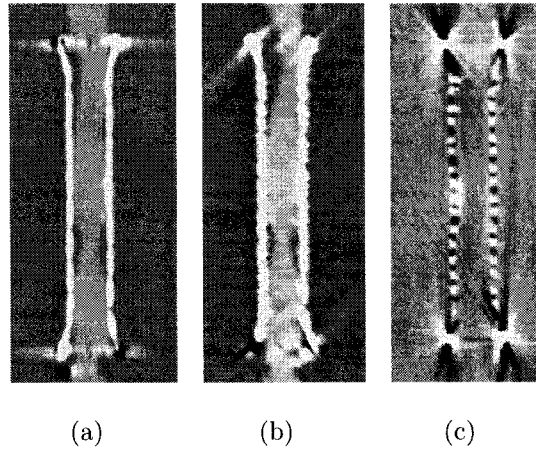


FIG. 1 Artéfacts métalliques pour différentes orientations d'une endoprothèse vasculaire en Nitinol par rapport à l'axe de rotation de la source : parallèle 1(a), 45 degrés 1(b) et perpendiculaire 1(c).

Objectifs de ce travail

Le projet dans lequel s'inscrit le travail présenté ici vise à réduire la présence de ces artéfacts sur les reconstructions de sorte à pouvoir effectuer une évaluation quantitative plus précise d'une resténose à l'intérieur d'une endoprothèse vasculaire.

Les travaux effectués par Nathalie Menvielle (Menvielle, 2004) ont permis la mise en œuvre et la validation d'une méthode basée sur un modèle alternatif. La reconstruction des images avec cette méthode nécessite toutefois de résoudre un problème non linéaire de très grande taille. Sa solution passe par l'utilisation de méthodes itératives nécessitant un temps de calcul excessif, de sorte que cette approche n'est pas encore pratique dans un contexte clinique.

Dans le but de progresser vers une application clinique tirant profit de ce modèle, des efforts doivent être consacrés à la réduction de la consommation de mémoire et à la mise en œuvre de méthodes permettant une reconstruction plus rapide des

images.

L'objectif général de ce travail est de mettre en œuvre des outils pour la reconstruction tomographique monochromatique et polychromatique proposée par Nathalie Menvielle, de sorte qu'il soit possible de reconstruire des images cliniques sur un ordinateur bon marché en un temps de l'ordre de quelques minutes.

Cet objectif peut être scindé en trois sous-objectifs :

1. Mettre en œuvre de manière efficace les opérations de projection et de rétro-projection en tenant compte de la géométrie de tomographes commerciaux.
2. Accélérer les méthodes d'optimisation par la mise en œuvre d'une méthode de recherche linéaire et d'un préconditionneur adaptés au problème linéaire de reconstruction tomographique.
3. Valider les méthodes sur des données cliniques.

Nos travaux seront basés sur les trois grandes hypothèses qui sont énumérées ci-dessous :

1. En exploitant la structure de l'opération de projection, il sera possible de reconstruire une image de taille clinique (512×512 ou 1024×1024) à partir de données également de taille clinique.
2. L'utilisation d'un préconditionneur tenant compte des propriétés du problème permettra un gain significatif au niveau du volume de calculs à effectuer et résultera en une accélération de la convergence des méthodes d'optimisation.
3. Les méthodes proposées permettront d'obtenir des images de meilleure qualité visuelle que celles reconstruites par les tomographes SOMATOM 16 et 64 de Siemens à partir de données brutes.

Structure du document

Les travaux ayant mené à l'atteinte de nos objectifs seront présentés comme suit :

Au chapitre 1, nous allons énoncer les principes de base de la tomographie à rayons X. Nous ferons un survol de son évolution technologique, du prototype initial aux appareils les plus récents. Nous verrons les méthodes analytiques permettant de reconstruire des images. Nous aborderons ensuite les méthodes dites algébriques. Nous verrons que l'image reconstruite par ces méthodes est une solution d'un système d'équations et peut être obtenue en minimisant itérativement une fonction objectif. Nous verrons enfin les méthodes envisagées pour effectuer cette minimisation.

La reconstruction par des méthodes itératives requiert d'effectuer les opérations de projection et de rétroprojection à de nombreuses reprises. Nous verrons, au chapitre 2, les stratégies employées pour réaliser ces opérations de manière performante, par l'entremise d'une matrice, tout en utilisant un espace mémoire raisonnable.

Le chapitre 3 est consacré à l'accélération des méthodes itératives par la mise en œuvre d'une méthode de préconditionnement adaptée à la structure du problème. Une telle méthode permet de réduire le nombre d'itérations à effectuer pour obtenir une image de qualité équivalente.

Les méthodes seront enfin validées, au chapitre 4, par des séries de résultats expérimentaux obtenus sur des données de taille clinique simulées et réelles.

Nous terminerons en tirant quelques conclusions qui permettront d'orienter la suite des travaux dans une perspective plus globale de réduction des artéfacts métalliques et de reconstruction tridimensionnelle.

CHAPITRE 1

PRÉSENTATION DU PROBLÈME

1.1 Tomographie à rayons X

Au début des années 1970, les méthodes de diagnostic et d'imagerie médicale se sont enrichies d'un nouveau venu. Les travaux de Godfrey N. Hounsfield ont mené à la construction du premier prototype de tomographe en 1970. Deux ans plus tard, les premiers essais cliniques avec cette technologie furent réalisés. Cette modalité est maintenant l'une des plus utilisées dans le milieu clinique puisqu'elle permet d'obtenir rapidement des images de bonne qualité.

Du grec *tomos* (morceau coupé), la tomographie est, selon *Le Nouveau Petit Robert* (2006), un « procédé d'exploration radiologique permettant d'obtenir la radiographie d'une mince couche d'organe à une profondeur voulue ».

Cette invention a suscité une telle révolution dans les méthodes de diagnostic qu'elle a valu à son créateur le prix Nobel de médecine en 1979 (Nobelprize.org, 2007). Le prototype est composé d'une source émettant un faisceau fin de rayons X en direction de l'objet. Un détecteur unique, de l'autre côté, collecte l'énergie ayant traversé ce dernier. En translatant le système source-détecteur latéralement pour couvrir tout le patient, on obtient ce qu'on appelle une projection. Le système effectue ensuite une légère rotation, dans le même plan, pour atteindre le prochain angle de projection, et le balayage est répété. La même procédure est employée jusqu'à ce que toutes les projections soient acquises. Un ordinateur collecte les données et reconstruit l'image.

La preuve de concept avait été faite beaucoup plus tôt, en 1917. Le mathématicien autrichien J. H. Radon publiait alors un article démontrant la possibilité de reconstruire un objet à partir de ses projections. Le lien entre un objet et ces dernières porte d'ailleurs le nom de transformée de Radon. Il fallut néanmoins attendre plus d'un demi-siècle avant que la théorie ne se transforme en une application médicale concrète.

Ce chapitre vise à établir les bases méthodologiques de la tomographie à rayons X, des points de vue matériel et des méthodes de reconstruction, bases sur lesquelles nous nous appuierons pour le développement de nos méthodes.

Nous commencerons par passer en revue quelques-unes des évolutions technologiques matérielles qu'a suivies la tomographie à rayons X, du prototype de Hounsfield jusqu'aux avancées les plus récentes. Ce survol permettra de situer la portée de nos travaux par rapport à ce qui se fait actuellement. Il permettra également d'entrevoir les avenues que pourra emprunter le projet global.

Nous verrons, par la suite, la relation entre un objet bidimensionnel et ses projections. Deux géométries seront abordées. La première, à rayons parallèles, correspond à la configuration des premiers tomographes et mène à la transformée de Radon. La deuxième, à rayons en éventail, correspond aux systèmes plus récents.

Ensuite, nous énoncerons la théorie qui sous-tend quelques méthodes de reconstruction d'une image à partir de ses projections à rayons parallèles. Le théorème de la tranche centrale de Fourier, qui lie le spectre d'un objet bidimensionnel au spectre de ses projections, sera utile à cet effet et mènera naturellement à la méthode des rétroprojections filtrées.

Des généralisations de cette méthode existent pour la reconstruction d'images à partir de projections selon différentes géométries. Ces dernières ne seront pas cou-

vertes, bien que ces techniques soient utilisées dans les tomographes commerciaux actuels. Nous énoncerons cependant un cadre méthodologique permettant de tenir compte des divers modèles de projection possibles. La reconstruction, dans ce cadre, s'énonce comme la résolution d'un système linéaire d'équations.

Une section sera consacrée à l'étude des phénomènes physiques régissant la formation des mesures. Le lien entre ces phénomènes et les projections vues auparavant sera énoncé. On aura alors compris comment, à partir des systèmes mécaniques décrits précédemment, on arrive à reproduire l'image d'une tranche d'un patient.

Nous aurons enfin tous les outils nécessaires pour énoncer le problème autour duquel sont articulés nos travaux. Ce problème s'inscrit dans le cadre des méthodes d'estimation bayésienne, méthodes qui permettent de tenir compte des propriétés statistiques des phénomènes physiques qui auront été étudiés plus tôt.

1.1.1 Évolution technologique

L'évolution technologique des appareils de tomographie a été stimulée par deux motivations principales : la réduction de la durée des examens et l'amélioration de la qualité des images. Ces deux objectifs sont étroitement liés, et une accélération des acquisitions résulte, bien souvent, en un accroissement de la qualité des reconstructions.

Nous allons aborder, dans cette section, quelques-unes des étapes qui ont mené à la conception des systèmes actuels. La revue de cet aspect est nécessaire puisque les changements apportés ont fait évoluer la configuration géométrique des systèmes, ce dont nous souhaitons tenir compte. Le chemin emprunté par les constructeurs à ce niveau correspond au chemin que nous avons emprunté pour la réalisation de nos travaux. Une partie significative des informations contenues dans cette section

proviennent de Kalender (2005).

Nous avons décrit, en introduction, la structure du prototype de tomographe construit par Hounsfield. Les mesures, effectuées une à la fois, étant entrecoupées de mouvements de translation et de rotation, il fallait plus de 24 heures pour obtenir l'image d'une coupe. Ces délais étaient beaucoup trop longs pour permettre l'utilisation en clinique de la méthode. La faisabilité de l'approche était néanmoins démontrée.

Il fallut attendre l'apparition des appareils de deuxième génération, en 1972, avant de voir se concrétiser la première étude clinique sur la tomographie à rayons X. Ces appareils utilisaient plusieurs cellules de détection et un éventail partiel. Ainsi, plusieurs mesures pouvaient être acquises simultanément et un moins grand nombre de translations était nécessaire. Une image pouvait ainsi être obtenue en environ cinq minutes.

L'élargissement de l'éventail pour couvrir tout le champ imagé a permis d'abandonner le mouvement de translation au profit d'un mouvement continu de rotation. Les appareils correspondants, apparus en 1976, sont dits de la troisième génération. Les appareils de cette époque pouvaient réaliser l'acquisition pour une coupe en une vingtaine de secondes. L'obstacle empêchant d'examiner n'importe quelle partie du corps, soit les artéfacts induits par les mouvements respiratoires du patient, a alors pu être franchi, les acquisitions pouvant être réalisées l'espace d'une seule respiration.

Deux générations subséquentes de tomographes sont également apparues, soit la quatrième et la cinquième. Pour la quatrième, une source en éventail et un anneau de détecteurs entourant le patient sont utilisés. La cinquième utilise, en guise de source, un faisceau d'électrons projetés sur une série d'anodes entourant le patient.

Aucune pièce n'est mobile, ce qui permet des acquisitions quasi instantanées. Peu de systèmes de ces deux générations ont été installés, en particulier en raison de leur coût élevé. La plupart des tomographes installés sont des machines de troisième génération.

Le tomographe utilisé pour la réalisation de ces travaux étant de cette génération, les développements effectués dans ce document sont orientés vers ce type d'appareil.

Les premiers tomographes de troisième génération ne pouvaient effectuer qu'une seule rotation de 360 degrés à la fois. Le tube étant alimenté par des câbles, il était nécessaire de « rembobiner » ces derniers avant de passer à l'acquisition suivante.

La solution retenue pour remédier à ce problème est apparue en 1987, sous le nom de technologie du « slip-ring ». Cette dernière prend la forme d'anneaux métalliques sur lesquels glissent des balais, fournissant ainsi l'énergie nécessaire au tube sans l'utilisation de câbles. Chaque séquence d'acquisition ne nécessitant pas d'accélérer et de décélérer le support de la source et du détecteur, on a pu assister, avec cette technologie, à des acquisitions en un temps de l'ordre de la seconde.

Ce mouvement continu de la source a précédé l'apparition en 1990 des tomographes hélicoïdaux pour lesquels on anime la table d'un mouvement continu. Les données acquises ne correspondent plus à une tranche, mais à un volume.

Des développements subséquents ont touché le nombre de lignes de détection. Des appareils de troisième génération, munis d'un détecteur à quatre barrettes, ont été commercialisés à partir de 1990. Des appareils de quatrième et cinquième génération comprenant plusieurs anneaux de détecteurs ont aussi été construits. Ces appareils ont permis d'augmenter la vitesse de la table et, par conséquent, de réaliser des acquisitions sur des volumes plus rapides.

Le nombre de barrettes continue à ce jour de suivre une tendance à la hausse. Nous avons notamment vu des détecteurs à 16 et 32 barrettes. En 2004, Siemens annonçait la mise en marché d'un appareil permettant l'acquisition de données sur 64 tranches. L'appareil est physiquement doté d'un détecteur comprenant 32 barrettes. L'innovation réside dans l'introduction d'une nouvelle technologie dite à source volante *Flying Focal Spot (FFS)*. Nous verrons les détails de fonctionnement de cette technologie à la section 2.6.2. À titre d'exemple, le récent appareil *Brilliance iCT* proposé par Philips est dotés de 128 barrettes physiques. L'utilisation d'une source volante permet de faire des acquisitions sur 256 tranches.

Toutes ces évolutions technologiques ont évidemment nécessité des adaptations au niveau des modèles de projection et des méthodes de reconstruction. Les prochaines sections sont consacrées à l'explication de certains de ces modèles dans un cadre bidimensionnel.

1.1.2 Projections et transformée de Radon

Dans cette section, les outils mathématiques de base sont mis en place, permettant de décrire les projections à rayons parallèles d'un objet. Ces projections forment ce qu'on appelle un sinogramme. Nous verrons ensuite la projection à rayons en éventail.

1.1.2.1 Projections à rayons parallèles : la transformée de Radon

La projection d'un objet $f(x, y)$ consiste en une intégrale de ligne sur chacune des droites normales à une droite d'angle θ_p . On parle alors d'une projection de l'objet selon l'angle θ_p . Une radiographie est un bon exemple de la projection d'un objet tridimensionnel sur un plan.

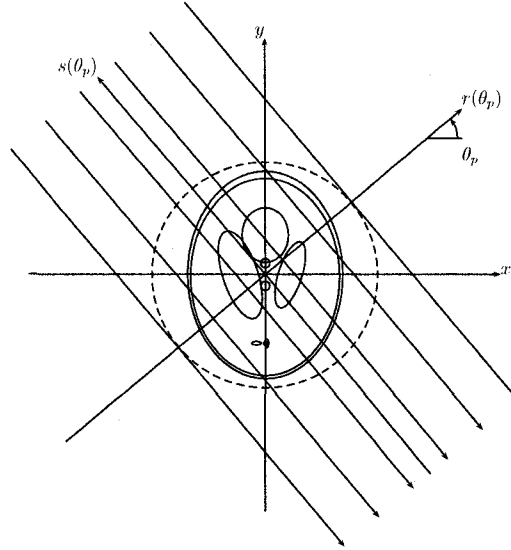


FIG. 1.1 Illustration du principe de la projection avec rayons parallèles.

La figure 1.1. illustre une telle projection pour le fantôme de Shepp-Logan. Outil standard en tomographie, il est formé de 10 ellipses modélisant la densité d'une section de la tête. Ce fantôme reviendra à plusieurs reprises au cours de ce travail.

Pour les développements, considérons tout d'abord cet objet dans un espace cartésien continu en deux dimensions. Sa projection selon une droite $s(\theta_p, r)$ est définie comme

$$p_{\theta_p}(r) = \int_{s(\theta_p, r)} f(x, y) ds.$$

$s(\theta_p, r)$ désigne une droite orientée parallèlement à l'axe s à une distance r de celui-ci.

Par changement de variable, on exprime le rayon comme une fonction bidimensionnelle de x et y

$$s(\theta_p, r) = \delta(x \cos \theta_p + y \sin \theta_p - r).$$

On obtient alors la forme intégrale suivante, définissant la transformée de Radon :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{f(x, y)\} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta_p + y \sin \theta_p - r) dx dy \\ &= p_{\theta_p}(r). \end{aligned}$$

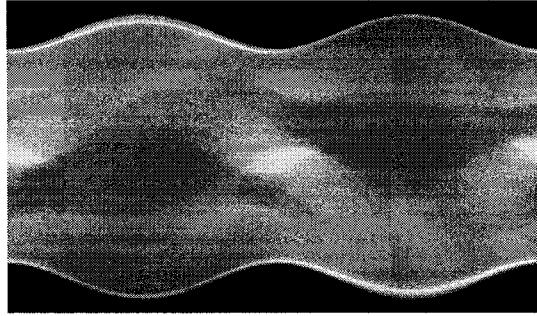


FIG. 1.2 Sinogramme obtenu en projetant le fantôme de Shepp et Logan.

L'ensemble des projections disposées dans un espace cartésien (θ_p, r) , tel qu'illustré à la figure 1.2 pour le fantôme de Shepp-Logan, forme le sinogramme.

L'opération de projection a des propriétés intéressantes qu'il est souhaitable de mentionner. Tout d'abord, elle est linéaire, ce qui permet d'appliquer le principe de superposition. Les projections d'objets composés peuvent donc être obtenues en effectuant la somme des projections de ses composantes. De plus, le sinogramme possède un axe de symétrie. En effet, lorsqu'on effectue une rotation du système d'axe d'un demi-tour, ce dernier se retrouve inversé. On remarque que les lignes sur lesquelles on effectue les intégrales sont les mêmes, mais de direction opposée. La projection obtenue est alors simplement retournée. Ces propriétés s'avèreront importantes dans la suite de ce travail.

1.1.2.2 Projections avec des rayons en éventail

L'introduction des tomographes de troisième génération, pour lesquels l'angle couvert par l'éventail source-détecteur est grand, a nécessité l'introduction de modèles et de méthodes de reconstruction pour des rayons non plus parallèles, mais en éventail.

Le tomographe utilisé pour la réalisation de ce travail étant de cette génération, les développements effectués dans ce document sont orientés vers ce type d'appareil.

Une projection est redéfinie, dans ces circonstances, comme l'ensemble des mesures obtenues pour une position du tube radiogène. On définit le rayon central comme la droite passant par la position du tube et l'isocentre. L'angle de projection, tel que défini plus tôt, est alors l'angle de la droite normale au rayon central. L'expression suivante lie l'angle θ_s du tube (source) et l'angle θ_p de la projection :

$$\theta_s = \theta_p + \frac{\pi}{2}.$$

Deux modèles de projection en éventail semblent être d'usage dans la plupart des tomographes, soit un éventail à rayons équidistants, faisant usage d'un détecteur rectiligne, ou un éventail à rayons équiangulaires, utilisant plutôt un détecteur courbe. La figure 1.3 illustre une telle projection.

En dimension infinie, il existe un fort lien entre les projections à rayons en éventail et à rayons parallèles. Sans entrer trop profondément dans les détails, traçons les grandes lignes de ce qui lie ces espaces de projections.

Dans une projection à rayons parallèles, l'angle d'un rayon θ_r correspond à l'angle de la source θ_s . Pour une projection à rayons en éventail, l'angle d'un rayon est plutôt décrit par l'angle de la source et l'angle du rayon θ_f au sein de l'éventail de sorte que

$$\theta_r = \theta_s + \theta_f.$$

Un rayon orienté selon un angle θ_r , dans une projection en éventail d'angle θ'_p , appartiendrait ainsi à une projection à rayons parallèles d'angle

$$\theta_p = \theta'_p + \theta_f.$$

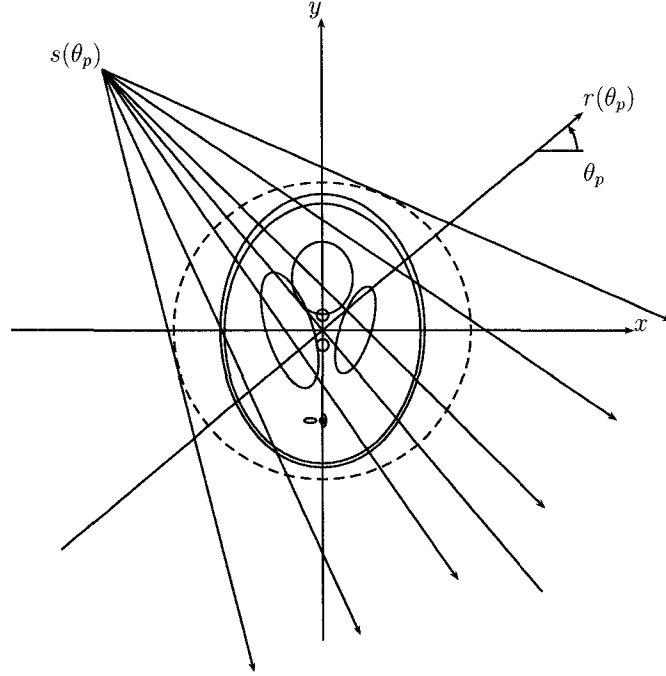


FIG. 1.3 Illustration du principe de la projection avec rayons en éventail équiangulaire.

Ce rayon passant nécessairement par la source, qui est située à un angle θ_s et à une distance R_F de l'isocentre, sa distance par rapport à l'isocentre s'exprime comme

$$r = R_F \sin \theta_f.$$

La projection en éventail $p'_{\theta'_p}(\theta_f)$ dont le rayon central se trouve à l'angle θ'_p est donc reliée aux projections à rayons parallèles $p_{\theta_p}(r)$ de la manière suivante :

$$p'_{\theta'_p}(\theta_f) = p_{\theta_p + \theta_f}(R_F \sin \theta_f).$$

Pour des rayons équidistants, on a plutôt $p'_{\theta'_p}(r)$ avec

$$\theta_p = \theta'_p + \arcsin \left(\frac{r}{R_F} \right).$$

Ces développements sont illustrés dans Kak & Slaney (1988).

1.1.3 Reconstruction à partir des projections

En rayons parallèles, le théorème de la tranche centrale de Fourier constitue la base des méthodes de reconstruction en reliant le spectre des projections à celui de l'objet. Ce raisonnement, ensuite étendu, permet d'obtenir une expression de l'objet en fonction de ses projections, menant à une méthode de reconstruction simple et remarquablement efficace, celle des rétroprojections filtrées.

1.1.3.1 Théorème de la tranche centrale de Fourier

Le théorème de la tranche centrale de Fourier établit le lien entre la transformée de Fourier bidimensionnelle de l'objet et la transformée de Fourier unidimensionnelle de ses projections à rayons parallèles. Nous verrons dans cette section comment ce lien apparaît. Le développement à suivre est tiré et adapté de Kak & Slaney (1988).

Reprenons à partir de l'expression d'une projection à rayons parallèles telle que définie auparavant :

$$p_{\theta_p}(r) = \int_{s(\theta_p, r)} f(x, y) ds.$$

Faisons passer l'objet dans le système de coordonnées rotatif (r, s) par le simple changement de variables

$$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_p) & \sin(\theta_p) \\ -\sin(\theta_p) & \cos(\theta_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

On note au passage que le déterminant du jacobien associé à ce changement de variables est unitaire.

Pour chaque valeur de θ_p , on obtient donc une représentation $f_{\theta_p}(r, s)$ de l'objet

tourné d'un angle $-\theta_p$. Ainsi, la projection selon cet angle s'effectue le long de s qui est maintenant un axe du système de coordonnées tourné d'un angle θ_p .

$$p_{\theta_p}(r) = \int f_{\theta_p}(r, s) ds.$$

Faisons, à présent, passer cette représentation de la projection d'angle θ_p dans le domaine spectral. L'intégration se fait le long de l'axe r . Ainsi

$$S_{\theta_p}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\theta_p}(r) e^{-i2\pi wr} dr$$

et

$$S_{\theta_p}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{\theta_p}(r, s) ds \right] e^{-i2\pi wr} dr.$$

Le changement de variables est, à ce point, inversé afin de revenir dans le système d'axes initial résultant en

$$S_{\theta_p}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi w(x \cos \theta_p + y \sin \theta_p)} dx dy.$$

Nous avons ainsi l'expression du spectre de la projection d'angle θ_p en fonction de l'objet initial. Comparons, pour terminer, cette expression avec celle du spectre de l'objet :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy.$$

Nous obtenons le lien fondamental derrière le théorème de la tranche centrale de Fourier, soit :

$$S_{\theta_p}(w) = F(w \cos \theta_p, w \sin \theta_p).$$

On en conclut que le spectre d'une projection correspond à la «tranche» de spectre de l'objet sur la droite d'angle θ_p passant par l'origine, d'où l'idée de tranche centrale.

Le théorème de la tranche centrale de Fourier permet de reconstruire une image à partir de projections à rayons parallèles équidistants. Dans la section suivante, nous poursuivrons le développement afin d'obtenir la méthode dite des rétroprojections filtrées, qui peut être généralisée à des projections de différentes géométries. Les méthodes utilisées actuellement dans les tomographes commerciaux sont des variantes de cette méthode.

1.1.3.2 Méthode des rétroprojections filtrées

Considérons la relation entre un spectre bidimensionnel et l'objet qu'il représente :

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv.$$

Passons maintenant dans un système de coordonnées polaires. Cela va permettre de mettre l'expression de l'objet sous une forme pour laquelle il est possible d'appliquer le théorème de la tranche centrale de Fourier. Ce faisant, on obtient

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w \cos \theta_p, w \sin \theta_p) e^{i2\pi w(x \cos \theta_p + y \sin \theta_p)} |w| dw d\theta_p.$$

Le facteur $|w|$ est imputable au changement de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires. Pour simplifier la notation, nous posons

$$r = x \cos \theta_p + y \sin \theta_p$$

de telle sorte que

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w \cos \theta_p, w \sin \theta_p) e^{i2\pi wr} |w| dw d\theta_p.$$

L'application du théorème de la tranche centrale de Fourier amène immédiatement l'expression

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\theta_p}(w) e^{i2\pi wr} |w| dw d\theta_p.$$

La variable r est constante ayant égard à w . L'expression de l'intégrale interne correspond donc au filtrage, dans le domaine spectral, de la projection à l'angle θ_p par le filtre en rampe $|w|$. Ce filtre est dit de Ram-Lak, du nom des deux auteurs à son origine. Notons $Q_{\theta_p}(r)$ cette projection filtrée, ainsi

$$f(x, y) = \int_0^\pi Q_{\theta_p}(r) d\theta_p$$

et

$$f(x, y) = \int_0^\pi Q_{\theta_p}(x \cos \theta_p + y \sin \theta_p) d\theta_p.$$

Cette expression décrit chaque échantillon de l'objet comme une somme d'échantillons bien choisis des projections.

Pour r et θ_p fixés, c'est-à-dire pour un échantillon particulier des projections filtrées, x et y décrivent une droite orientée perpendiculairement à l'axe r (voir figure 1.1). Cette droite est la même que celle selon laquelle la projection $p_{\theta_p}(r)$ a été obtenue. L'échantillon $Q_{\theta_p}(r)$ est alors reproduit pour tous les points de cette droite. Cet échantillon est ainsi en quelque sorte épandu, ou rétroprojeté, sur cette droite, d'où le nom de la méthode.

Un raisonnement alternatif figure dans Grangeat (2002) où on propose plutôt de trouver une fonction sinogramme h dont la rétroprojection se trouve à être une impulsion centrée à l'origine. Ce raisonnement mène également à la rétroprojection filtrée.

Le lien étroit entre les projections à rayons en éventail et en parallèle, vu à la section 1.1.2.2, permet de déduire une méthode analytique de reconstruction analogue à la méthode des rétroprojections filtrées. Cette dernière fait intervenir une expression différente pour le filtre de reconstruction. Une explication d'une telle méthode pour des géométries à rayons équiangulaires et équidistants se trouve dans Kak & Slaney (1988). D'autres généralisations permettent également de reconstruire des

images acquises lors d'une séquence hélicoïdale. Ces méthodes sont de peu d'intérêt ici puisque des méthodes alternatives ont été développées dans le cadre de travaux antérieurs (Allain, 2002 ; Menvielle 2004) sur lesquels ces travaux sont basés. Ces méthodes, dites algébriques, font d'ailleurs abstraction du modèle de projection utilisé et fonctionneront autant pour une projection à rayons parallèles que pour l'un ou l'autre des éventails. C'est à ces méthodes que nous nous intéressons dans le cadre de ces travaux.

1.1.3.3 Reconstruction algébrique

La théorie exposée dans les sections précédentes pose une hypothèse qui n'est pas vérifiée en pratique. Elle suppose qu'on évolue dans des espaces de dimension infinie, c'est-à-dire qu'on dispose d'un nombre illimité de projections et de détecteurs.

Dans un contexte réaliste, il faut tenir compte du fait que l'on n'effectue qu'un nombre limité de mesures, ce qui se traduit par une étape d'échantillonnage.

Il existe des méthodes basées sur la rétroprojection filtrée pour des données discrètes. Dans les prochaines sections, nous verrons plutôt une catégorie de méthodes alternatives dites algébriques. Ces dernières permettent une plus grande flexibilité au niveau de la modélisation, permettant notamment de tenir compte de façon transparente des géométries à rayons parallèles ou en éventail et même de géométries plus complexes dont il sera question au chapitre 2. La résolution du problème résultant requiert soit l'inversion d'une matrice, qui devient énorme lorsqu'on considère des problèmes de taille clinique, soit l'utilisation de méthodes itératives. Dans les deux cas, la résolution demande considérablement plus de temps que la méthode traditionnelle.

Discrétisation de l'objet et des projections

Le nombre de projections, de détecteurs ainsi que d'échantillons d'image étant finis, les fonctions qu'on supposait continues jusqu'à présent doivent être modélisées par leur contrepartie discrète par une étape d'échantillonnage.

Cette formulation du problème passe par deux fonctions d'échantillonnage, soit une pour l'image et une autre pour les projections. L'interaction entre ces deux fonctions d'échantillonnage mène à un opérateur discret pour la projection.

Échantillonnage de l'objet

Commençons par réaliser l'échantillonnage de l'objet sur une grille cartésienne à l'aide d'une fonction d'échantillonnage $b(x, y)$. Nous considérons que l'objet est défini de telle manière qu'il puisse être exprimé en fonction de la valeur de ses échantillons de la façon suivante :

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^J f_j b_j(x, y).$$

On remarque ici que malgré que l'image soit bidimensionnelle, les fonctions d'échantillonnage ne sont indexées que selon le seul paramètre $j \in [1, J]$, J étant le nombre total d'échantillons de l'image. L'image échantillonnée est volontairement mise sous forme d'un vecteur car la formation des données sera modélisée, dans un domaine discret, par des produits de matrices par des vecteurs.

La fonction $b_j(x, y)$ est une reproduction de la fonction d'échantillonnage décalée pour être centrée autour du centre de l'échantillon d'indice j . Elle peut s'exprimer

sous la forme convolutionnelle suivante :

$$b_j(x, y) = b(x, y) * \delta(x - x_j, y - y_j),$$

où le point (x_j, y_j) correspond au centre de l'échantillon concerné.

Plusieurs modèles peuvent être utilisés pour l'échantillonnage. Le cas intuitif de pixels carrés s'exprime comme

$$b(x, y) = \text{rect}_{[-\Delta/2; \Delta/2]}(x, y),$$

où Δ représente la largeur du pixel, qui est identique à l'espacement entre ces derniers.

Un autre modèle proposé lors de travaux antérieurs (Allain, 2002) consiste à considérer des pixels circulaires :

$$b(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Ici, R est le rayon du support de l'échantillon.

Chacune de ces fonctions présente des inconvénients. Des travaux visant à trouver de meilleures bases sur lesquelles effectuer la décomposition ont été tentés, mais n'ont pas abouti à une réponse claire à ce sujet. La recherche d'une telle fonction reste à ce jour un problème ouvert.

Échantillonnage des projections

Effectuons maintenant un travail semblable au niveau des projections. Nous allons modéliser la projection en fonction de l'angle d'un rayon θ_r , ce qui permettra de modéliser aisément plusieurs types de projections.

De même que pour l'image, les projections sont disposées dans un vecteur de telle sorte que pour un échantillon (ou détecteur) $n_d \in [1, N_d]$ d'une projection $n_p \in [1, N_p]$, on se retrouve dans le vecteur à l'indice

$$i = (n_p - 1) \times N_d + n_d,$$

où $i \in [1, I]$ avec $I = N_p N_d$. La projection correspondante est alors exprimée par

$$p_i = p(\theta_{ri}, r_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \sin(\theta_{ri}) - y \cos(\theta_{ri}) - r_i) dx dy.$$

Cette expression fait intervenir la fonction de Dirac, ce qui indique que l'on considère une projection à rayons minces.

Une généralisation est nécessaire ici afin de pouvoir tirer parti de plusieurs modèles de rayons. La physique veut que nous ayons un nombre fini de détecteurs, mais également que ces détecteurs soient de largeur non infinitésimale. Un détecteur collecte ainsi une plage de rayons d'une certaine largeur. Dans cet esprit, introduisons une fonction $l(x, y, \theta_r, r)$ représentant la couverture d'un rayon sur l'image. Cette notation permet de généraliser l'expression des projections pour plusieurs formes de rayons. En indexant les rayons disponibles par i , on pose alors $l_i(x, y) = l(x, y, \theta_{ri}, r_i)$. L'expression pour l'échantillon p_i des projections devient ainsi

$$p_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) l_i(x, y) dx dy.$$

On peut donc concevoir un échantillon i des projections comme le produit scalaire de l'objet $f(x, y)$ et du modèle du rayon $l_i(x, y)$.

Avec cette notation, on obtient une projection à rayons minces en prenant

$$l_i(x, y) = \delta(x \sin(\theta_{ri}) - y \cos(\theta_{ri}) - r_i).$$

On peut également modéliser un rayon de largeur w en acceptant que la fonction du rayon soit bornée entre $-w/2$ et $w/2$, ce qui peut être fait à l'aide d'une fonction

rectangle

$$l_i(x, y) = \text{rect}_{[-\frac{w}{2}; \frac{w}{2}]}(x \sin(\theta_{ri}) - y \cos(\theta_{ri}) - r_i).$$

En faisant entrer la notation de l'objet échantillonné dans la projection p_i , on a

$$p_i = \int \int \sum_{j=1}^J f_j b_j(x, y) l_i(x, y) dx dy$$

et

$$p_i = \sum_{j=1}^J f_j \int \int b_j(x, y) l_i(x, y) dx dy.$$

L'intégrale double constitue un produit scalaire. On définit alors le coefficient

$$a_{ij} = \int \int b_j(x, y) l_i(x, y) dx dy$$

de telle sorte que

$$p_i = \sum_{j=1}^J f_j a_{ij}.$$

Cette somme constitue le produit du vecteur \mathbf{f} par la matrice \mathbf{A} . Le vecteur des projections s'obtient ainsi par

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{f}.$$

La matrice \mathbf{A} constitue la discrétisation de l'opération de projection. De ce fait, on lui attribue le nom de matrice de projection. Dans un cadre à rayons parallèles, elle est la discrétisation de l'opérateur de la transformée de Radon vu à la section 1.1.2.1.

Chacun de ses coefficients a_{ij} correspond à la projection le long du rayon $l_i(x, y)$ de la fonction de base de l'échantillon de l'objet $b_j(x, y)$.

Dans le cas de rayons minces avec une image constituée de pixels carrés, les coefficients de la matrice de projection sont donc la longueur de l'intersection du rayon

avec chaque pixel. Pour le modèle à pixel circulaires avec rayons larges proposé dans Allain (2002), la matrice est constituée des aires d'intersection entre ces pixels et le rayon.

Le problème de reconstruction consistant à déterminer la valeur de \mathbf{f} est maintenant formulé comme la résolution d'un système linéaire d'équations pouvant être effectuée par des méthodes développées à cette fin.

1.1.4 Formation des mesures

Les méthodes de reconstruction d'une image à partir de ses projections ont été exposées. Nous nous intéressons maintenant aux phénomènes physiques permettant d'obtenir les projections d'une quantité caractéristique de l'objet imager.

Lorsqu'un photon X transite à travers un matériau, deux événements peuvent se produire avec une certaine probabilité. Dans le premier cas, le photon est transmis directement au détecteur et constitue un photon dit primaire. Dans le second cas, il interagit avec le matériau. Aux énergies d'intérêt en radiologie, deux types d'interactions se produisent principalement. Le premier est l'effet photoélectrique. Lorsqu'il se produit, le photon est absorbé et ne parvient pas au détecteur. Le deuxième est l'effet Compton. Cet effet conduit à la réémission d'un photon de plus faible énergie dans une direction aléatoire. Ce photon réémis peut alors être transmis à un des détecteurs. On parle alors de rayonnement secondaire, qui est associé au bruit.

La probabilité qu'il y ait interaction dépend de l'épaisseur du matériau et est caractéristique de sa nature. Il est, en effet, plus probable qu'un photon interagisse lorsque la densité du milieu est plus élevée. De plus, la physique dicte un lien entre cette probabilité et l'énergie du photon incident ; un photon d'énergie élevée aura

plus de chances de traverser. Les phénomènes sous-jacents sont résumés dans ce qu'on appelle le coefficient d'atténuation linéique. Ce dernier est la quantité que l'on souhaite reconstruire.

Considérons qu'une source émet n_0 photons en direction d'un matériau homogène mince, d'épaisseur Δw . Le nombre moyen Δn de ces photons qui interagissent avec le matériau est donné par (Macovski, 1983)

$$\Delta n = \mu n_0 \Delta w.$$

La variable μ représente le coefficient d'atténuation linéique auquel on fera référence directement par coefficient d'atténuation et est exprimée en cm^{-1} .

Ainsi, le nombre moyen de photons n n'ayant pas interagi après avoir traversé une épaisseur w du matériau s'exprime sous la forme intégrale

$$\int_n^{n_0} \frac{dn}{n} = \int_0^W \mu dw.$$

Le nombre moyen de photons provenant du rayonnement primaire qui sont détectés est régi par la loi de Beer-Lambert qu'on obtient en résolvant l'expression précédente :

$$n = n_0 e^{-W\mu}.$$

Le corps d'un patient n'étant pas du tout homogène, le rayon traverse un milieu de coefficient d'atténuation variable, de sorte que l'intégrale de droite ne se résout pas directement. On aboutit alors à l'expression

$$n = n_0 e^{-\int_0^W \mu(w) dw}.$$

Nous avons considéré un modèle d'émission déterministe, c'est-à-dire pour lequel le nombre de photons émis est connu et égal à n_0 . Un modèle physiquement plus réaliste est obtenu en considérant l'émission de photons comme un processus de

Poisson dont le paramètre n_0 constitue la moyenne. Les phénomènes responsables de l'atténuation ne modifient pas cette caractéristique, de sorte que le nombre de photons reçus au détecteur suit également une loi de Poisson. La preuve de cette affirmation est faite dans Macovski (1983). Ainsi, le nombre de photons détectés est maintenant modélisé par une variable aléatoire de Poisson :

$$N \sim \mathcal{P}_O \left\{ n_0 e^{-\int_0^W \mu(w) dw} \right\},$$

dont n constitue une réalisation.

Considérons maintenant une distribution bidimensionnelle du coefficient d'atténuation. Le nombre de photons traversant l'objet le long d'une ligne $s(\theta_p, r)$ est décrit par

$$N_{\theta_p}(r) \sim \mathcal{P}_O \left\{ n_0 e^{-\int_{s(\theta_p, r)} \mu(x, y) ds} \right\}.$$

Nous pouvons alors lier cette expression à celle des projections obtenues à la section 1.1.2. Pour des projections à rayons parallèles, on fait intervenir la transformée de Radon de la façon suivante :

$$N(\theta_p, r) \sim \mathcal{P}_O \left\{ n_0 e^{-\mathcal{R}\{\mu(x, y)\}} \right\}.$$

Dans un espace discret, on obtient une réalisation \mathbf{n} d'un processus de Poisson tel que

$$\mathbf{N} \sim \mathcal{P}_O \left\{ n_0 e^{-\mathbf{A}\mu} \right\}.$$

La reconstruction du coefficient d'atténuation peut être effectuée par la méthode des rétroprojections filtrées, ou une de ses généralisations, en considérant qu'exactement $n(\theta_p, r) = n_0 e^{-\int_{s(\theta_p, r)} \mu(x, y) ds}$ photons sont détectés.

On a alors

$$-\ln \left(\frac{n(\theta_p, r)}{n_0} \right) = \mathcal{R}\{\mu(x, y)\}.$$

Les méthodes algébriques demandent alors de résoudre le système

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mu = -\ln\left(\frac{\mathbf{n}}{n_0}\right)$$

avec $\mathbf{n} = n_0 e^{-\mathbf{A}\mu}$.

Cela ne permet toutefois pas de tenir compte de l'aspect stochastique de la formation des mesures. La prochaine section établit un cadre méthodologique dans lequel cet aspect peut être pris en compte.

1.1.5 La reconstruction en tant que problème d'estimation

On vient de voir que les méthodes usuelles de reconstruction tomographique ne tiennent pas compte du caractère stochastique de la génération des données. La méthode que nous allons voir dans cette section est étroitement liée au fait que les quantités en jeu sont de nature aléatoire. Cette méthode s'inscrit dans le cadre de l'estimation.

1.1.5.1 Méthodologie de l'estimation

Nous avons vu que les données suivaient une loi de probabilité qui est fonction de l'objet. Ainsi, nous représentons les projections par un vecteur aléatoire \mathbf{P} . L'objet n'étant pas connu *a priori*, nous considérons également un vecteur aléatoire \mathbf{U} pour le représenter.

Ainsi, pour le vecteur des projections \mathbf{P} , connaissant l'objet, on note $f_{\mathbf{P}|\mathbf{U}=\mu}(\mathbf{p})$, la probabilité d'observer la réalisation \mathbf{p} des projections. Cette expression correspond au problème dit direct. C'est le modèle de formation des données vu à la section 1.1.4.

L'outil fondamental de l'estimation est le théorème de Bayes, qu'on énonce de la manière suivante :

$$f_{U|P=\mathbf{p}}(\mu) = \frac{f_{P|U=\mu}(\mathbf{p})f_U(\mu)}{f_P(\mathbf{p})}.$$

Ce théorème permet d'obtenir la probabilité $f_{U|P=\mathbf{p}}(\mu)$, dite *a posteriori*, qu'un objet μ soit à l'origine des projections \mathbf{p} .

Il fait intervenir deux autres fonctions de densité de probabilité : $f_U(\mu)$ et $f_P(\mathbf{p})$. La première représente la probabilité *a priori* que l'objet prenne une valeur donnée. Elle amène le concept de régularisation que nous aborderons à la section 1.1.5.3. Dans un premier temps, nous la supposons constante.

Enfin, $f_P(\mathbf{p})$ exprime, à l'instar de $f_U(\mu)$, la probabilité d'une réalisation des projections par rapport aux autres. Il s'agit d'un facteur de normalisation qui ne varie pas en fonction de μ .

Nous cherchons à obtenir la valeur de μ maximisant la vraisemblance $f_{U|P=\mathbf{p}}(\mu)$, c'est-à-dire l'objet qui est, avec la plus forte probabilité, à l'origine des données :

$$\hat{\mu} = \arg \max_{\mu} f_{U|P=\mathbf{p}}(\mu).$$

Cela constitue le problème dit inverse.

Dans la plupart des cas, il n'existe aucune formulation analytique qui permette d'obtenir directement la valeur de l'estimée. On se rabattra alors sur des méthodes approximatives, qui le plus souvent sont itératives. Ces dernières sont orientées vers la minimisation d'une fonction objectif ou critère, qui correspond à l'opposée de la vraisemblance. Nous notons ce critère $C(\mu)$, de telle sorte que l'estimée s'exprime comme suit :

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu} C(\mu) = \arg \min_{\mu} -f_{U|P=\mathbf{p}}(\mu).$$

Les différentes hypothèses pouvant être émises au sujet du modèle direct et des valeurs admissibles de l'objet conduisent à différents estimateurs; nous décrivons à la section suivante celui dont nous nous sommes servi.

1.1.5.2 Problème inverse pour la reconstruction tomographique

Le nombre de photons traversant l'objet suit un processus stochastique de Bernoulli. Considérant qu'un très grand nombre de photons sont émis et émergent de l'objet, nous approximations ce processus stochastique par une loi normale; ainsi, on modélise chaque donnée p_i comme une réalisation d'un processus gaussien de variance σ_B^2 :

$$P_i \sim \mathcal{N} \{ [\mathbf{A}\mu]_i, \sigma_B^2 \}.$$

La densité de probabilité pour P_i est alors

$$f_{P_i|U_i=\mu_i}(p_i) = \frac{1}{\sigma_B \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(p_i - [\mathbf{A}\mu]_i)^2}{2\sigma_B^2} \right)$$

et l'ensemble des mesures suit la loi de probabilités

$$f_{\mathbf{P}|U=\mu}(\mathbf{p}) = \prod_{i=1}^I \frac{1}{\sigma_B \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{(p_i - [\mathbf{A}\mu]_i)^2}{2\sigma_B^2} \right).$$

Considérant qu'on n'a aucune information *a priori* sur les valeurs que peut prendre l'objet, on se retrouve, en appliquant le théorème de Bayes, avec l'expression

$$f_{U|\mathbf{P}=\mathbf{p}}(\mu) = f_{\mathbf{P}|U=\mu}(\mathbf{p}),$$

qu'on cherche à maximiser pour μ .

En prenant le logarithme du produit d'exponentielles, on obtient plutôt la somme de leurs arguments. La position du maximum n'est pas altérée, la transformation étant monotone croissante. Ainsi,

$$\hat{\mu} = \arg \max_{\mu} f_{U|\mathbf{P}=\mathbf{p}}(\mu) = \arg \max_{\mu} \sum_{i=1}^I -\frac{1}{2}(p_i - [\mathbf{A}\mu]_i)^2.$$

En changeant le signe, on se retrouve avec un problème de minimisation, et l'expression de l'estimée devient

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu} \sum_{i=1}^I \frac{1}{2} (p_i - [\mathbf{A}\mu]_i)^2.$$

Ainsi, la valeur de l'estimée est celle qui minimise le critère $C(\mu)$, dit des moindres carrés. Ce critère est une fonction quadratique et peut se mettre sous une forme purement matricielle facilitant sa manipulation :

$$C(\mu) = \frac{1}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu)^T (\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu).$$

Nous nous trouvons dans le cas singulier où il existe une expression explicite des solutions de ce problème. En effet, le gradient de la forme quadratique précédente s'annule lorsque

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mu = \mathbf{A}^T \mathbf{p},$$

indiquant un point stationnaire. Ce système d'équations est alors satisfait pour les valeurs de μ minimisant le critère des moindres carrés. Cet ensemble de valeurs forme un ensemble non vide du fait que la matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ est semi-définie positive. Tous les points stationnaires, et il en existe au moins un, sont des minima du critère $C(\mu)$.

Lorsque la solution est unique, ce qui est équivalent à ce que la matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ soit non singulière, cette solution s'obtient ainsi :

$$\hat{\mu} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{p}.$$

La régularisation, abordée à la section suivante, permettra d'assurer l'existence d'une solution unique à ce système.

Étant donné le nombre de variables à estimer et la taille des données, il sera néanmoins nécessaire de recourir à des méthodes itératives pour résoudre le système.

On remarque finalement que la résolution de ce problème est analogue à l'opération de rétroprojection filtrée. En effet, la matrice \mathbf{A} étant définie comme la discrétisation de la projection, son adjointe, soit \mathbf{A}^T , correspond à la rétroprojection. La matrice $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ peut être vue comme l'opération de filtrage. Cette dernière est, à l'opposé de la rétroprojection filtrée, réalisée au niveau de l'image. On peut la percevoir, dans le domaine de Fourier, comme un filtre en forme de cône qui serait appliqué au spectre 2D de l'image.

1.1.5.3 Régularisation

Le problème de reconstruction tomographique est, le plus souvent, mal conditionné. Il peut même être singulier dans certains cas. Cette difficulté peut être surmontée avec des techniques de régularisation. Elles consistent à émettre une hypothèse sur la vraisemblance d'une solution par rapport aux autres. Cette hypothèse est représentée par la fonction de densité de probabilité $f_V(\mu)$ de l'expression du théorème de Bayes.

On verra que la régularisation se manifeste par l'ajout d'un ou de plusieurs termes à l'expression du critère.

La méthode est souvent utilisée pour assurer la stabilité de la solution d'un problème. Nous verrons également qu'on peut l'utiliser pour favoriser certaines caractéristiques de la solution. Nous l'utilisons, en particulier, pour obtenir une réduction du niveau de bruit dans nos reconstructions.

Distribution gaussienne de la solution

En choisissant une loi normale centrée, on accorde plus de crédit aux solutions de faible module. La fonction de densité de probabilité correspondante est donc

$$f_{U_j}(\mu_j) = \frac{1}{\sigma_U \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\mu_j^2}{2\sigma_U^2}\right).$$

En considérant tout l'objet, on a, en prenant l'argument de l'exponentielle sous forme matricielle

$$f_U(\mu) = \frac{1}{(\sigma_U \sqrt{2\pi})^J} \exp\left(-\frac{\mu^T \mu}{2\sigma_U^2}\right).$$

Par le théorème de Bayes, en ramenant la fonction de densité de la section précédente pour les données, on obtient la loi *a posteriori*, en omettant les coefficients indépendants de μ :

$$f_{U|P=p}(\mu) \propto \exp\left(-\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu)^T(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu)}{2\sigma_B^2} - \frac{\mu^T \mu}{2\sigma_U^2}\right)$$

et l'expression de l'estimée :

$$\hat{\mu} = \arg \max_{\mu} \exp\left(-\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu)^T(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu)}{2\sigma_B^2} - \frac{\mu^T \mu}{2\sigma_U^2}\right).$$

Cette expression est équivalente à

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu} \left\{ \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu)^T(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu)}{2\sigma_B^2} + \frac{\mu^T \mu}{2\sigma_U^2} \right\}$$

et à

$$\hat{\mu} = \arg \min_{\mu} \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu)^T(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu) + \lambda \frac{1}{2}\mu^T \mu \right\},$$

en ayant posé $\lambda \equiv \sigma_B^2/\sigma_U^2$.

Le résultat est la fonction objectif

$$C(\mu) = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu)^T(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu) + \lambda \frac{1}{2}\mu^T \mu.$$

L'information *a priori* sur la solution, telle que formulée, ajoute ainsi un terme dit de pénalisation au critère. Ce terme attribue un coût au carré du module de la solution, ce qui aura tendance à privilégier des solutions faibles en amplitude.

On note également la présence du paramètre de régularisation λ , qui peut prendre n'importe quelle valeur positive. Ce paramètre vient pondérer l'importance (ou la confiance) qu'on accorde aux données par rapport à celle qu'on accorde l'information *a priori*. C'est le rapport des variances du bruit et des valeurs de l'estimée. Ainsi, des données fortement bruitées et l'hypothèse d'une faible distribution des valeurs de l'estimée imposeront une valeur élevée à λ . À l'opposé, le paramètre λ sera nul, ce qui correspond à un critère non régularisé, pour des données non bruitées en lesquelles on a parfaitement confiance.

Le gradient de ce critère s'écrit

$$\nabla C(\mu) = -\mathbf{A}^T(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu) + \lambda\mu$$

et s'annule pour les solutions du système d'équations

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I})\hat{\mu} = \mathbf{A}^T \mathbf{p}.$$

On peut facilement montrer que, dans la mesure où la valeur de λ est plus élevée que la plus petite valeur propre de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, ce système possède une solution unique.

Généralisation

D'autres hypothèses sur les valeurs vraisemblables de l'objet peuvent être formulées. Dans le contexte de la reconstruction tomographique, les images obtenues sont habituellement constituées de régions plutôt homogènes séparées par de franches discontinuités.

Cette propriété peut être favorisée par l'ajout de termes de régularisation supplémentaires pénalisant les différences entre échantillons voisins. La prise en compte

de cette information demande la généralisation de la fonction de régularisation vue à la section précédente, qui s'exprime alors

$$R(\mu) = \sum_{m=0}^M \sum_{j=1}^J \psi \left(w_m [\mathbf{D}^{(m)} \mu - \mathbf{d}^{(m)}]_j \right),$$

considérant l'expression du critère

$$C(\mu) = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu)^T(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu) + \lambda R(\mu).$$

Nous avons introduit, dans cette expression, la fonction dite de pénalisation $\psi(t)$. Cette fonction scalaire détermine la nature de la pénalisation à appliquer à chaque composante des différences.

La fonction de régularisation se présente ici comme la somme de différentes composantes pénalisant le non-respect à une hypothèse faite *a priori* sur l'objet. On peut voir cette forme de régularisation comme l'imposition de M contraintes douces d'égalité de la forme

$$\mathbf{D}^{(m)} \mu \approx \mathbf{d}^{(m)},$$

pour lesquelles la non-satisfaction est pénalisée.

Dans le cas qui nous concerne, les termes de pénalisation s'appliquent sur

- la norme de la solution ($m = 0$);
- les différences verticales ($m = 1$);
- les différences horizontales ($m = 2$);
- les différences diagonales vers le sud-est ($m = 3$);
- les différences diagonales vers le nord-est ($m = 4$).

Les matrices $\mathbf{D}^{(m)}$ représentent les opérations linéaires de différences dans chacune des directions. Elles sont composées de 1 sur la diagonale principale et de -1 sur une autre diagonale, correspondant à l'échantillon avec lequel la différence est faite. La matrice $\mathbf{D}^{(0)}$ est égale à l'identité.

À défaut d'avoir une information plus précise sur les discontinuités, on fixe, à titre d'approximation, $\mathbf{d}^{(m)} = \mathbf{0}$. Une information plus complète pourrait possiblement être obtenue par un prétraitement du sinogramme, par exemple, ou d'une reconstruction effectuée par une méthode plus rapide.

Le paramètre w_m est inversement proportionnel à la distance entre les échantillons, de sorte que $w_0 = w_1 = w_2 = 1$ et $w_3 = w_4 = 1/\sqrt{2}$. On permet ainsi que la différence entre des échantillons plus éloignés puisse être plus grande qu'entre des échantillons immédiatement voisins.

Fonctions de pénalisation

En plus de la fonction quadratique, il existe une grande variété de fonctions possédant différentes propriétés. On en propose deux types dans Idier (2001), soit les fonctions L_2L_1 et L_2L_0 dont nous allons brièvement discuter ci-après.

Fonction quadratique

La fonction quadratique $\psi(t) = t^2/2$ utilisée jusqu'ici a de belles propriétés, en ce sens qu'elle s'intègre naturellement au contexte de l'estimation sous hypothèse gaussienne. Le terme de régularisation correspond alors à une distribution gaussienne des valeurs de $\mathbf{D}^{(m)}\mu$ autour de $\mathbf{d}^{(m)}$:

$$f_{\mathbf{R}}^{(m)}(\mu) \propto \exp \left(-\frac{(\mathbf{D}^{(m)}\mu - \mathbf{d}^{(m)})^T (\mathbf{D}^{(m)}\mu - \mathbf{d}^{(m)})}{2\sigma_{\mathbf{R}}^2} \right).$$

Le critère complètement quadratique qu'on en obtient présente l'avantage de posséder une solution analytique.

Cette fonction pénalise cependant davantage les différences naturelles de l'objet que les différences associées au bruit dans les régions homogènes. Les frontières subissent alors un fort lissage au même titre que le bruit, ce qui n'est pas souhaitable.

Fonctions L_2L_1

Ces fonctions sont différentiables et présentent un caractère quadratique à l'origine et asymptotiquement linéaire (Idier, 2001).

Les fonctions de ce type ont ceci de particulier qu'elles permettent une meilleure préservation des discontinuités naturelles de l'objet en leur infligeant une moindre pénalité que pour la fonction quadratique, tout en pénalisant de manière quadratique les petites discontinuités assimilables au bruit dans les données.

Deux exemples sont la branche d'hyperbole :

$$\psi(t) = \sqrt{t^2 + \delta^2} - \delta$$

et la fonction de Huber :

$$\psi(t) = \begin{cases} t^2 & t < \delta \\ 2\delta|t| - \delta^2 & t \geq \delta. \end{cases}$$

Ces dernières sont illustrées et comparées à la fonction quadratique à la figure 1.4.

La première a l'avantage d'être deux fois continûment dérivable, ce qui n'est pas le cas de la deuxième pour laquelle la dérivée seconde présente des discontinuités à $|t| = \delta$.

Par rapport à la fonction quadratique, le compromis à faire est moins restrictif du point de vue de la qualité d'image. Cet avantage se traduit cependant par l'ajus-

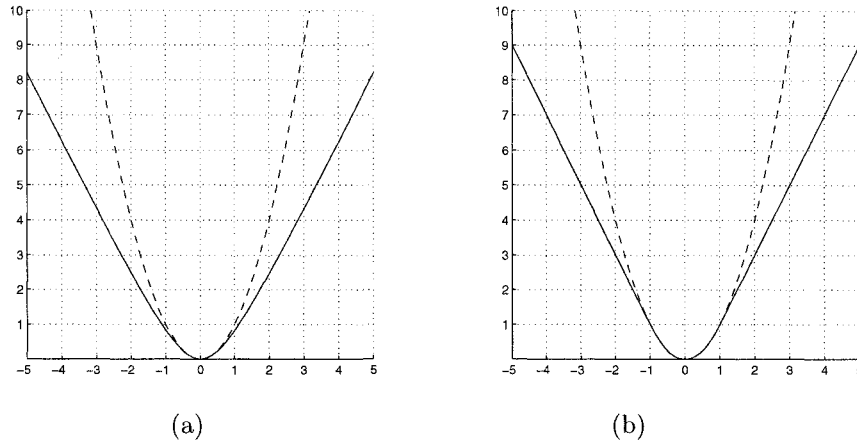


FIG. 1.4 Allure des fonctions de pénalisation L_2L_1 (trait plein) par rapport à une fonction quadratique (trait pointillé) : une branche d'hyperbole 1.4(a) et une fonction de Huber 1.4(b). Dans les deux cas, $\delta = 1$. Pour avoir une pente asymptotiquement identique, la branche d'hyperbole a été multipliée par 2δ .

tement du paramètre supplémentaire δ qui décrit la transition entre les caractères quadratique et linéaire.

La fonction que nous utiliserons est la branche d'hyperbole, du fait que cette dernière est deux fois continûment dérivable et qu'elle préserve la convexité du critère.

Fonctions L_2L_0

Ces fonctions sont quadratiques à l'origine et sont asymptotiquement constantes. Au delà d'un certain seuil, les discontinuités ne sont donc pas davantage pénalisées, assurant leur meilleure préservation. Elles sont cependant non convexes et pourraient par conséquent causer l'apparition de minima locaux au niveau du critère, dans l'un desquels la méthode de minimisation pourrait s'enliser.

1.2 Optimisation

Nous cherchons à minimiser le critère des moindres carrés régularisés en utilisant une fonction de pénalisation L_2L_1 , soit la branche d'hyperbole vue à la section 1.1.5.3. Cette fonction est convexe et deux fois continûment dérivable. Le minimum de cette fonction ne s'obtient pas analytiquement ; nous traiterons ainsi de méthodes itératives d'optimisation adaptées à ce contexte.

Dans un esprit de généralité, plutôt que d'exprimer cette section en termes de notre critère $C(\mu)$, nous nous servons plutôt d'une fonction objectif plus générale $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable. Nous ferons toutefois les liens qui s'imposent entre la matière vue ici et notre problème de reconstruction.

Le problème général à résoudre s'énonce comme suit :

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

Les principales méthodes d'optimisation applicables au problème qu'on se propose de résoudre se classent en deux catégories, soit les méthodes dites à régions de confiance et les méthodes dites de directions.

Dans les deux cas, des suites d'itérées $\{\mathbf{x}_k\}_{k=0}^K$ sont générées, qui, sous certaines conditions, convergent vers un point \mathbf{x}^* minimisant la fonction.

Dans les paragraphes de cette section, nous explorerons quelques méthodes et conditions permettant d'effectuer la minimisation de la fonction $f(\mathbf{x})$.

Nous décrirons d'abord ce qu'est un minimum en énonçant les conditions d'optimalité en optimisation sans contraintes.

Nous couvrirons ensuite, de manière générale, les différentes approches envisa-

geables. Nous verrons dans un premier temps l'idée qui sous-tend les méthodes à régions de confiance. Nous nous concentrerons ensuite sur les méthodes à directions de descente, en commençant par l'énoncé de conditions importantes pour assurer la convergence de ces dernières. Nous présenterons ensuite les méthodes de directions les plus importantes.

Nous aborderons également trois méthodes de recherche linéaire : la méthode de Moré-Thuente, qui est générale, ainsi que deux méthodes adaptées à la forme de notre critère proposées dans Labat & Idier (2005).

1.2.1 Conditions d'optimalité

Dans un contexte général de minimisation sans contraintes de fonctions deux fois continûment différentiables, deux conditions sont nécessaires et une suffit pour qu'un point \mathbf{x}^* soit un minimum local de la fonction $f(\mathbf{x})$.

Définissons d'abord les divers types de minima pouvant être rencontrés. On dit que \mathbf{x}^* est (Orban, 2007) :

- un minimum global de f si et seulement si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$;
- un minimum local de f si et seulement s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \epsilon)$, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*)$, où $B(\mathbf{x}^*, \epsilon)$ est une boule de rayon ϵ centrée autour de \mathbf{x}^* ;
- un minimum local strict de f si et seulement s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^*, \epsilon)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$, $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*)$;
- un minimum local isolé de f si et seulement s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que \mathbf{x}^* est l'unique minimum local de $f(\mathbf{x})$ dans $B(\mathbf{x}^*, \epsilon)$.

1.2.1.1 Condition nécessaire du premier ordre

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continûment différentiable et le point \mathbf{x}^* , un minimum local de f , alors

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0.$$

Cette condition, nécessaire pour que \mathbf{x}^* soit un minimum, définit un point stationnaire du premier ordre pour f .

1.2.1.2 Condition nécessaire du second ordre

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable et le point \mathbf{x}^* , un minimum local de f , alors $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ est semi-défini positif, c'est-à-dire

$$\mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} \geq 0$$

pour tout $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ non nul.

1.2.1.3 Condition suffisante du second ordre

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois continûment différentiable et le point \mathbf{x}^* . Si $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ est défini positif, alors le point \mathbf{x}^* est un minimum strict de f .

En particulier, lorsque la fonction f est convexe, la dernière condition est respectée en tout point. Ainsi, tout minimum local est strict et est de plus l'unique minimum global de f .

1.2.2 Méthodes à régions de confiance

Les méthodes dites à régions de confiance consistent à construire un modèle quadratique autour de l'itérée courante \mathbf{x}_k et à identifier une région à l'intérieur de laquelle on a confiance en ce modèle comme approximation de la fonction $f(\mathbf{x})$. L'itérée \mathbf{x}_{k+1} s'obtient en minimisant le modèle sous la contrainte de rester à l'intérieur de la région de confiance. Ainsi, considérant la forme quadratique

$$m_k(\mathbf{d}) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{B}_k \mathbf{d},$$

on cherche une solution approximative au sous-problème

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_k = \arg \min_{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n} & m_k(\mathbf{d}) \\ \text{s.c.} & \quad \|\mathbf{d}\| \leq \Delta_k \end{aligned}$$

générant une suite d'itérées

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k$$

globalement convergente.

La taille de la région de confiance est sujette à variation. On détermine cette dernière à chaque itération en comparant la réduction de $m_k(\mathbf{d})$ (prédite ou anticipée) à la réduction effective de la valeur de la fonction $f(\mathbf{x}_k + \mathbf{d})$.

Lorsque la réduction anticipée est semblable à la réduction effectivement obtenue, mais que le déplacement retenu est sur la frontière de la région de confiance, alors on gagnerait probablement à effectuer un pas plus long. Le niveau de confiance au modèle peut ainsi être augmenté. À l'opposé, si la réduction est loin de celle qui était prévue par le modèle, on doit réduire la taille de la région de confiance. Enfin, dans le cas où la réduction est semblable à la réduction prédite et que le pas sélectionné correspond au minimum de m_k , la taille de la région de confiance est acceptable et n'est pas modifiée.

La méthode la plus simple dans ce domaine consiste à trouver le point de Cauchy à chaque itération. Ce point est celui qui minimise le modèle dans la direction de plus forte pente de la fonction f au point \mathbf{x}_k . Cette méthode n'est pas très performante, mais est globalement convergente. Toute méthode résultant en une itérée de meilleure qualité que le point de Cauchy sera alors également globalement convergente.

1.2.3 Méthodes à directions de descente

Ces méthodes génèrent une suite d'itérées selon une formule de mise à jour de la forme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$$

Ainsi, contrairement aux méthodes à régions de confiance où le déplacement est calculé en une seule étape, on procède ici en deux étapes successives :

1. identification d'une direction de descente \mathbf{d}_k ;
2. recherche d'une longueur de pas α_k (recherche linéaire) dans cette direction, réduisant suffisamment la valeur de la fonction.

Une direction de descente est une direction selon laquelle un déplacement au voisinage immédiat du point courant résulte en une diminution de la valeur de la fonction objectif. Sauf si celle-ci est nulle, ce qui indique un point stationnaire, la direction opposée au gradient est celle qui résulte en la plus forte descente.

L'étape de recherche linéaire consiste à obtenir une solution α_k , la plupart du temps approximative au sous problème de minimisation à une variable :

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k),$$

avec $\alpha > 0$.

Dans les rares cas où on connaît analytiquement le minimum de cette fonction, on parle de recherche linéaire exacte. Pour tous les autres cas, on parle de recherche linéaire approximative.

Avant d'entrer dans l'explication des méthodes, commençons par énoncer des conditions qui assureront que ces dernières convergeront vers un point stationnaire de la fonction f . Nous verrons, notamment ce que signifie « une longueur de pas réduisant suffisamment la valeur de la fonction ».

1.2.3.1 Conditions de convergence

Le respect de certaines conditions au niveau de la direction de descente et de la recherche linéaire assurent que la séquence $\{\mathbf{x}_k\}$ d'itérées générées par une méthode sera globalement convergente, c'est-à-dire que, peu importe le point de départ, la série convergera vers un point stationnaire de f .

Conditions de Wolfe

La satisfaction des conditions de Wolfe assure qu'une stratégie de recherche linéaire générera des longueurs de pas α_k causant une réduction suffisante de la fonction objectif.

Considérons une itération k d'une méthode de directions appliquée à une fonction continue. On suppose de plus que \mathbf{d}_k est une direction de descente pour f au point \mathbf{x}_k .

La première condition, la condition d'Armijo, exige qu'une descente suffisante soit

réalisée :

$$f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) + c_1 \alpha \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k$$

pour $c_1 \in (0, 1)$. Elle admet cependant des pas arbitrairement petits, de sorte qu'elle n'assure pas nécessairement une progression suffisante vers le minimum. Un pas de longueur nulle serait, par exemple, acceptable au sens de cette condition.

À cette dernière, on ajoute une deuxième condition qui concerne la courbure de la fonction :

$$\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k)^T \mathbf{d}_k \geq c_2 \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k$$

pour $c_2 \in (c_1, 1)$

En exigeant que la dérivée au point d'arrivée ait suffisamment augmenté, on écarte les pas trop courts. Ces deux conditions forment les conditions dites de Wolfe.

La dernière condition peut être renforcée en exigeant également que la pente au point d'arrivée ne soit pas trop élevée. Cela mène aux conditions de Wolfe dites fortes. La condition sur la courbure prend ainsi la forme :

$$|\nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{d}_k)^T \mathbf{d}_k| \leq c_2 |\nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k|$$

pour $c_2 \in (c_1, 1)$.

Théorème de Zoutendijk

Pour une itération obtenue par la formule de mise à jour vue précédemment, si les conditions suivantes sont remplies (Nocedal and Wright, 1999) :

1. \mathbf{d}_k est une direction de descente ;
2. la longueur du pas α_k répond aux conditions de Wolfe ;

3. la fonction f est bornée inférieurement et continûment dérivable sur un ensemble ouvert \mathcal{O} contenant l'ensemble de niveaux $L = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$;
4. le gradient est Lipschitz-continu sur \mathcal{O} , c'est-à-dire que

$$\|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\tilde{\mathbf{x}})\| \leq L\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|$$

pour tout $\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$,

alors

$$\sum_{k \geq 0} \cos^2 \theta_k \|\nabla f_k\|^2 < \infty$$

où θ_k est l'angle entre la direction \mathbf{d}_k et l'opposé au gradient.

L'idée peut être résumée ainsi : dans la mesure où les quatre conditions précédentes sont remplies, si une direction de descente \mathbf{d}_k faisant un angle ne s'approchant pas de $\pm \frac{\pi}{2}$ est empruntée par une méthode de directions, alors le cosinus sera suffisamment éloigné de 0. Pour satisfaire à la condition de Zoutendijk, c'est-à-dire pour que la série soit bornée, la norme du gradient n'a alors d'autre choix que de tendre suffisamment rapidement vers zéro. Un algorithme et une fonction répondant à toutes ces conditions généreront ainsi une suite $\{\mathbf{x}_k\}$ globalement convergente.

1.2.3.2 Méthodes de la plus forte pente et de Newton

Une classe de méthodes obtiennent une direction \mathbf{d}_k en résolvant un système linéaire d'équations de la forme

$$\mathbf{M}_k \mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$$

avec \mathbf{M}_k définie positive.

La direction obtenue prend ainsi la forme d'une transformation linéaire de l'opposé du gradient :

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{M}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k).$$

Ces méthodes sont adaptées à la minimisation de fonctions non linéaires. Nous ferons la distinction de trois cas.

Le premier, le plus simple, s'obtient lorsque $\mathbf{M}_k = \mathbf{I}$. On se retrouve alors avec la méthode de la descente du gradient ou de la plus forte pente :

$$\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$$

Cette méthode progresse généralement lentement vers la solution ; on lui préférera alors des méthodes tirant davantage parti des propriétés du problème à résoudre.

L'incorporation d'information du second ordre par l'utilisation du hessien mène à la méthode de Newton, ce qui constitue le deuxième cas de figure. Cette dernière s'appuie sur le développement en série de Taylor du deuxième ordre comme approximation de la fonction autour du point courant. La direction est alors obtenue en résolvant le système

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k),$$

ce qui est équivalent à la minimisation de la forme quadratique correspondant au développement de Taylor.

L'utilisation d'information de second ordre sur la fonction permet d'obtenir une convergence plus rapide vers la solution. Cela exige cependant la résolution d'un système linéaire d'équations à chaque itération, ce qui s'avère très coûteux pour des problèmes de grande taille.

Le troisième cas est intermédiaire entre les deux précédents et regroupe les méthodes dites quasi-Newton. Celles-ci font souvent de très bons compromis entre la méthode de la plus forte pente et la méthode de Newton du point de vue de la vitesse de convergence.

La direction est obtenue en résolvant le système

$$\mathbf{B}_k \mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k)$$

où soit \mathbf{B}_k est une approximation définie positive facilement inversible du hessien ou \mathbf{B}_k^{-1} est une approximation de son inverse et on a $\mathbf{d}_k = \mathbf{B}_k^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k)$. Ces approximations sont généralement mises à jour à chaque itération. Cela mène par exemple aux méthodes BFGS et L-BFGS décrites dans Nocéda & Wright (1999).

Les méthodes de cette classe sont résumées par l'algorithme 1.1.

Soit \mathbf{x}_0 le point de départ de l'algorithme.

Évaluer $f_0 = f(\mathbf{x}_0)$ et $\nabla f_0 = \nabla f(\mathbf{x}_0)$.

Résoudre $\mathbf{M}_0 \mathbf{d}_0 = -\nabla f_0$ pour \mathbf{d}_0 .

$k = 0$.

Tant que $\|\nabla f_k\| \neq 0$,

$\alpha_k =$ Résultat d'une recherche linéaire dans la direction \mathbf{d}_k .

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$,

$\nabla f_{k+1} = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1})$.

Résoudre $\mathbf{M}_{k+1} \mathbf{d}_{k+1} = -\nabla f_{k+1}$ pour \mathbf{d}_{k+1} .

$k \leftarrow k + 1$.

Algorithme 1.1: Méthodes de Newton et quasi-Newton.

Pour une fonction f répondant aux conditions du théorème de Zoutendijk, la convergence des méthodes quasi-Newton est globale du moment que \mathbf{M}_k^{-1} est définie positive. Cette condition assure que la direction \mathbf{d}_k en est une de descente :

$$\mathbf{d}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{d}_k = -\mathbf{d}_k^T \nabla f_k < 0$$

1.2.3.3 Gradient conjugué

Une autre famille de méthodes basée sur la recherche linéaire émerge de la méthode du gradient conjugué. Cette méthode est d'abord conçue pour la résolution de systèmes linéaires symétriques et définis positifs, mais certaines variantes permettent son application à des problèmes non linéaires. Nous expliquons ici la méthode de base avant d'aborder ses variantes.

Soit le système linéaire d'équations :

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

où $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique définie positive. La résolution de ce problème est équivalente à la minimisation de la forme quadratique

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

ou à l'annulation de son résidu défini comme

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y} = \nabla f(\mathbf{x}).$$

On note que cette expression constitue le gradient de la forme quadratique. Cette constatation sera importante au moment d'adapter la méthode à des problèmes non linéaires.

On note que le système d'équations $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{p}$, correspondant à la reconstruction tomographique non régularisée, n'est pas symétrique. Dans ce cas, l'algorithme du gradient conjugué doit être appliqué au système normal :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{p}.$$

La méthode s'appuie sur la propriété de la conjugaison par rapport à \mathbf{H} . Une belle illustration de la puissance de cette propriété se trouve dans Nocéda & Wright (1999) et est résumée ci-dessous.

Dans le cas où la matrice \mathbf{H} est diagonale, les vecteurs propres de la forme quadratique f sont alignés avec les vecteurs de la base canonique. La minimisation de la forme quadratique peut alors se faire en minimisant tour à tour le long de ses vecteurs de base. Cela résulte en une méthode convergeant en au plus n itérations.

Dans le cas où \mathbf{H} n'est plus une diagonale, on peut appliquer une transformation $\mathbf{S} = [\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n-1}]$, où \mathbf{d}_k sont les directions de descente suivies pour la minimisation, telle que

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$$

Cette transformation résulte en une nouvelle forme quadratique à minimiser :

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{H} \mathbf{S} \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{y}$$

Ce problème est résolu en au plus n itérations si cette nouvelle forme quadratique est telle que ses vecteurs propres sont alignés selon la base canonique, ce qui revient à ce que la matrice $\mathbf{S}^T \mathbf{H} \mathbf{S}$ soit diagonale. Cette propriété est obtenue par la \mathbf{H} conjugaison des directions selon lesquelles on minimise :

$$\mathbf{d}_k^T \mathbf{H} \mathbf{d}_i = 0 \text{ pour tout } i \neq k$$

On peut montrer qu'une direction \mathbf{H} conjuguée est obtenue en prenant

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{d}_k$$

avec

$$\beta_{k+1} = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}$$

La nouvelle direction s'obtient donc facilement à partir de la direction précédente et du résidu des itérations courante et précédente. La méthode demande alors relativement peu de mémoire et de temps de calcul par itération par rapport à une méthode de Newton ou à certaines méthodes quasi-Newton.

Dans la direction \mathbf{d}_k , le minimiseur s'obtient analytiquement :

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{H} \mathbf{d}_k}$$

Tous les éléments sont maintenant réunis de sorte qu'on puisse maintenant énoncer l'algorithme 1.2 du gradient conjugué linéaire.

Soit \mathbf{x}_0 le point de départ de l'algorithme.

Évaluer $f_0 = f(\mathbf{x}_0)$ et $\mathbf{r}_0 = \mathbf{H}\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}$,

$\mathbf{d}_0 = -\mathbf{r}_0$,

$k = 0$.

Tant que $\|\mathbf{r}_k\| \neq 0$,

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{H} \mathbf{d}_k},$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k,$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \alpha_k \mathbf{H} \mathbf{d}_k,$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k},$$

$$\mathbf{d}_{k+1} = -\mathbf{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{d}_k,$$

$$k \leftarrow k + 1.$$

Algorithme 1.2: Gradient conjugué.

La méthode du gradient conjugué converge plus rapidement que la méthode de la plus forte pente et demande peu de calculs supplémentaires. La vitesse de cette convergence est cependant fortement liée à la distribution des valeurs propres du problème.

Pour un système décrit par la matrice \mathbf{H} de taille n par n , il est montré que la méthode du gradient conjugué converge en un maximum de n itérations. Certains cas particuliers conduisent à une convergence en un nombre beaucoup plus faible d'itérations. Si le problème comprend r valeurs propres distinctes, on peut montrer que la solution sera atteinte au bout de r itérations. Également, on pourra

s'attendre à une convergence plus rapide si les valeurs propres distinctes sont rassemblées en un faible nombre de groupes, d'où l'idée d'améliorer la distribution des valeurs propres par une méthode dite de préconditionnement.

1.2.3.4 Gradient conjugué préconditionné

Le préconditionnement se traduit par une simple modification de l'algorithme du gradient conjugué, ce que nous verrons dans la présente section. Nous verrons plus de détails sur les méthodes de préconditionnement au chapitre 3.

La démarche consiste à définir un changement de variable

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\mathbf{x}.$$

Le problème est alors transformé en la minimisation de la forme quadratique

$$\tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{C}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{C}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{C}^{-T} \mathbf{y},$$

ou la résolution du système

$$\mathbf{C}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{C}^{-1} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{C}^{-T} \mathbf{y}.$$

On souhaite définir une transformation telle que les valeurs propres du nouveau système soient mieux groupées.

Le résidu de ce système s'exprime

$$\tilde{\mathbf{r}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{C}^{-T}(\mathbf{H}\mathbf{C}^{-1}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y})$$

Énonçons l'algorithme du gradient conjugué pour ce nouveau problème : L'algorithme du gradient conjugué pour ce nouveau problème est énoncé à l'algorithme 1.3.

Soit $\tilde{\mathbf{x}}_0$ le point de départ de l'algorithme.

Évaluer $\tilde{f}_0 = \tilde{f}(\tilde{\mathbf{x}}_0)$ et $\tilde{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{C}^{-T}(\mathbf{H}\mathbf{C}^{-1}\tilde{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{y})$,

$\tilde{\mathbf{d}}_0 = -\tilde{\mathbf{r}}_0$,

$k = 0$.

Tant que $\|\tilde{\mathbf{r}}_k\| \neq 0$,

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_k^T \tilde{\mathbf{r}}_k}{\tilde{\mathbf{d}}_k^T \mathbf{C}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{C}^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_k},$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{x}}_k + \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{d}}_k,$$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{r}}_k + \tilde{\alpha}_k \mathbf{C}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{C}^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_k,$$

$$\tilde{\beta}_{k+1} = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{k+1}^T \tilde{\mathbf{r}}_{k+1}}{\tilde{\mathbf{r}}_k^T \tilde{\mathbf{r}}_k},$$

$$\tilde{\mathbf{d}}_{k+1} = -\tilde{\mathbf{r}}_{k+1} + \tilde{\beta}_{k+1} \tilde{\mathbf{d}}_k,$$

$$k \leftarrow k + 1.$$

Algorithme 1.3: Gradient conjugué préconditionné (première version).

De simples manipulations des termes permettent d'exprimer chacune des étapes de l'algorithme en fonction de \mathbf{x} et $\mathbf{r}(\mathbf{x})$.

Premièrement, on introduit la direction préconditionnée

$$\mathbf{p}_k \equiv \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C}^{-T} \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_k.$$

Le calcul de cette direction est effectué en résolvant le système

$$\mathbf{M} \mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k.$$

Deuxièmement, on définit

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{C}^{-1} \tilde{\mathbf{d}}_k.$$

Le calcul de ce vecteur à chaque itération prend la même forme que la formule de mise à jour pour la direction \mathbf{d}_{k+1} de l'algorithme 1.2.

On obtient ainsi l'algorithme 1.4 du gradient conjugué préconditionné.

Soit \mathbf{x}_0 le point de départ de l'algorithme.

Évaluer $f_0 = f(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{r}_0 = (\mathbf{H}\mathbf{x}_0 - \mathbf{y})$,

Résoudre $\mathbf{M}\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$ pour \mathbf{p}_0 .

$\mathbf{b}_0 = -\mathbf{p}_0$,

$k = 0$.

Tant que $\|\mathbf{r}_k\| \neq 0$,

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{p}_k}{\mathbf{b}_k^T \mathbf{H} \mathbf{b}_k},$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \tilde{\alpha}_k \mathbf{b}_k,$$

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \tilde{\alpha}_k \mathbf{H} \mathbf{b}_k.$$

Résoudre $\mathbf{M}\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1}$ pour \mathbf{p}_{k+1} .

$$\tilde{\beta}_{k+1} = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{p}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{p}_k},$$

$$\mathbf{b}_{k+1} = -\mathbf{p}_{k+1} + \tilde{\beta}_{k+1} \mathbf{b}_k,$$

$$k \leftarrow k + 1.$$

Algorithme 1.4: Gradient conjugué préconditionné (version pratique).

On note que puisque \mathbf{C} est non singulière, \mathbf{M} est nécessairement symétrique définie positive. Cette propriété est essentielle pour préserver la symétrie du système d'équations, ce qui est une condition nécessaire pour l'utilisation de l'algorithme du gradient conjugué.

1.2.3.5 Gradient conjugué non linéaire

Le gradient conjugué linéaire minimise la forme quadratique caractérisée par la matrice \mathbf{H} . Lorsque la fonction est non quadratique, il n'y a plus identité entre le gradient et le résidu, du fait que cette matrice n'est plus définie. De plus, pour une fonction générale, le pas optimal n'est plus obtenu de manière analytique.

Toutefois, en remplaçant le résidu dans l'expression de l'algorithme par le gradient et en employant une méthode de recherche linéaire approximative remplissant les conditions de Wolfe, on obtient une variante pouvant s'appliquer à la minimisation de fonctions non quadratiques.

Ainsi, diverses méthodes du gradient conjugué non linéaire existent et se distinguent par l'expression utilisée pour β_{k+1} et la méthode de recherche linéaire employée.

La plus simple, constituant la méthode de Fletcher-Reeves, propose simplement de remplacer le résidu par le gradient :

$$\beta_{k+1}^{\text{FR}} \leftarrow \frac{\nabla f_{k+1}^T \nabla f_{k+1}}{\nabla f_k^T \nabla f_k}$$

Une autre méthode, celle de Polak-Ribière, est caractérisée par l'expression :

$$\beta_{k+1}^{\text{PR}} \leftarrow \frac{\nabla f_{k+1}^T (\nabla f_{k+1} - \nabla f_k)}{\nabla f_k^T \nabla f_k}$$

Aucune autre méthode n'a été montrée significativement plus efficace que cette méthode (Nocédal and Wright, 1999).

Notons enfin que pour une fonction quadratique, lorsque la recherche linéaire est exacte, l'algorithme produit des itérées pour lesquelles les gradients sont orthogonaux. Dans ce cas, toutes les expressions pour β_{k+1} sont alors équivalentes.

Convergence du gradient conjugué non linéaire

Nous supposons que la fonction $f(\mathbf{x})$ satisfait les conditions 3 et 4 du théorème de Zoutendijk vues à la section 1.2.3.1.

Lorsqu'une recherche linéaire exacte est utilisée, les directions empruntées par les méthodes du gradient conjugué non linéaire sont toujours des directions de descente. On peut s'en convaincre en observant l'expression suivante :

$$\nabla f_{k+1}^T \mathbf{d}_{k+1} = -\|\nabla f_{k+1}\|^2 + \beta \nabla f_{k+1}^T \mathbf{d}_k$$

Lorsque le pas optimal est effectué, alors ∇f_{k+1}^T et \mathbf{d}_k sont orthogonaux et le deuxième terme s'annule (Nocédal and Wright, 1999), et la méthode est globalement convergente.

La méthode de Fletcher-Reeves est assurée de donner des directions de descente du moment que la recherche linéaire remplit les conditions de Wolfe avec $c_1 \in (0, 1/2)$ et $c_2 \in (c_1, 1/2)$.

Il n'y a pas de tel résultat pour la méthode de Polak-Ribière ; cependant en définissant $\beta_{k+1}^{\text{PR}+} = \max \{0, \beta_{k+1}^{\text{PR}}\}$, et en exigeant que la méthode de recherche linéaire respecte la condition suivante :

$$\nabla f_{k+1}^T \mathbf{d}_k \leq 0$$

nous sommes assurés que des directions de descente seront générées. Cette condition semble raisonnable, si on considère qu'une valeur positive de cette expression

indique que la valeur de la fonction objectif en \mathbf{x}_{k+1} remonte en direction \mathbf{d}_k .

Un autre résultat de convergence implique des stratégies de redémarrage, c'est-à-dire qu'on réinitialise l'algorithme périodiquement en forçant $\beta = 0$, ce qui entraîne une itération de la méthode de la plus forte pente.

Pour une fonction $f(\mathbf{x})$ non quadratique, la séquence des itérées $\{\mathbf{x}_k\}$ est généralement infinie. Notons k_j , les itérations auxquelles le gradient conjugué est redémarré. On suppose que le nombre d'itérations entre les redémarrages est fini, la séquence $\{k_j\}$ est alors infinie elle aussi. Alors les méthodes du gradient conjugué non linéaire sont convergentes aux sens où

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f_k\| = 0,$$

c'est-à-dire que la borne inférieure de la norme du gradient pour chaque sous-séquence forme une séquence convergeant vers 0 (Nocéda and Wright, 1999).

Ainsi, autant la méthode de Fletcher-Reeves que la méthode de Polak-Ribière sont globalement convergentes si un redémarrage est effectué chaque fois qu'une direction de non-descente est générée. Dans le pire des cas, un redémarrage est effectué à toutes les itérations et la méthode se comporte comme la méthode de la plus forte pente.

Dans la mesure où la fonction qu'on souhaite minimiser possède un hessien symétrique défini positif, nous faisons le pari que la méthode du gradient conjugué non linéaire tirera bénéfice d'une méthode de préconditionnement. Le hessien variant d'itération en itération, il en va possiblement de même pour le préconditionneur qu'on note cette fois \mathbf{M}_k . La structure commune des algorithmes du gradient conjugué non linéaire préconditionné est donc représentée par l'algorithme 1.5.

La méthode utilisée pour la réalisation de ces travaux est celle de Polak-Ribière avec

Soit \mathbf{x}_0 le point de départ de l'algorithme.

Évaluer $f_0 = f(\mathbf{x}_0)$, $\nabla f_0 = \nabla f(\mathbf{x}_0)$.

Résoudre $\mathbf{M}_0 \mathbf{p}_0 = \nabla f_0$ pour \mathbf{p}_0 .

$\mathbf{b}_0 = -\mathbf{p}_0$,

$k = 0$.

Tant que $\|\nabla f_k\| \neq 0$,

$\tilde{\alpha}_k =$ Résultat d'une méthode de recherche linéaire dans la direction \mathbf{b}_k .

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \tilde{\alpha}_k \mathbf{b}_k$,

$\nabla f_{k+1} = \nabla f(\mathbf{x}_{k+1})$,

Résoudre $\mathbf{M}_{k+1} \mathbf{p}_{k+1} = \nabla f_{k+1}$ pour \mathbf{p}_{k+1} .

$\tilde{\beta}_{k+1} = \beta_{k+1}^{\text{FR}}, \beta_{k+1}^{\text{PR}}$ ou $\beta_{k+1}^{\text{PR+}}$,

$\mathbf{b}_{k+1} = -\mathbf{p}_{k+1} + \tilde{\beta}_{k+1} \mathbf{b}_k$,

$k \leftarrow k + 1$.

Algorithme 1.5: Gradient conjugué non linéaire préconditionné.

$\beta^{\text{PR+}}$ sans modification des conditions de Wolfe. Nous avons toutefois incorporé une stratégie de redémarrage à chaque fois qu'une direction de non-descente est rencontrée. En pratique, il n'a jamais été nécessaire d'effectuer un redémarrage. Nous verrons au chapitre 3 quelles méthodes de préconditionnement ont été envisagées et laquelle a été retenue.

1.2.3.6 Méthode de Newton avec gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué linéaire peut être utile dans le cadre des méthodes de Newton. On rappelle que pour la méthode de Newton, la direction de descente \mathbf{d}_k s'obtient en résolvant le système

$$\nabla^2 f(\mathbf{x})\mathbf{d}_k = -\nabla f(\mathbf{x}).$$

Pour des problèmes de très grande taille, il n'est pas envisageable de représenter explicitement le hessien, ce dernier exigeant un espace considérable en mémoire. Le calcul de ce dernier à chaque itération, dans un contexte de minimisation de fonctions non quadratiques, est également très exigeant en temps de calcul.

L'algorithme du gradient conjugué peut alors être utilisé pour résoudre le système. On obtient ainsi une méthode de Newton plus légère puisqu'il n'est pas nécessaire de représenter le hessien, mais seulement de mettre en œuvre le produit de ce dernier par un vecteur.

1.2.4 Recherche linéaire

Considérons la fonction deux fois continûment dérivable

$$\phi(\alpha) = f(\mathbf{x}_k + \alpha\mathbf{d}_k)$$

définie pour $\alpha > 0$. Il s'agit de la fonction objectif, lorsqu'on se déplace en direction \mathbf{d}_k à partir du point courant \mathbf{x}_k .

La recherche linéaire est le processus par lequel on cherche une valeur de α résultant en une diminution suffisante de la fonction objectif dans la direction \mathbf{d}_k . Suffisante peut s'exprimer en termes de diverses conditions ; les conditions de Wolfe sont celles auxquelles nous faisons référence ici.

Dans le cas quadratique, le minimum de cette fonction est connu analytiquement. La recherche linéaire est donc exacte. Pour le cas plus général de fonctions non quadratiques, il n'existe aucune expression analytique pour le minimum. Face à une telle fonction, on aura, la plupart du temps, recours à des méthodes itératives approximatives. Nous avons vu que de telles méthodes permettent tout de même d'obtenir des algorithmes globalement convergents dans la mesure où l'on suit une direction de descente et que l'on satisfait les conditions de Wolfe.

Nous présentons, dans cette section, les trois méthodes qui ont été comparées dans le cadre de ces travaux. La première, la méthode de Moré-Thuente (Moré and Thuente, 1994) est une méthode de recherche linéaire itérative générale générant des pas satisfaisant les conditions de Wolfe fortes. Cette méthode est celle qui a été utilisée dans les travaux de Nathalie Menvielle.

Nous présenterons ensuite deux méthodes, proposées dans Labat & Idier (2005), plus adaptées à la forme particulière de notre critère.

1.2.4.1 Recherche linéaire de Moré-Thuente

La méthode de Moré-Thuente permet d'obtenir, dans certaines conditions, un pas α dans un intervalle $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ donné, satisfaisant les conditions de Wolfe fortes.

Conditions de descente suffisante et de courbure pour $c_1 \leq c_2$

Le développement de la preuve (Moré and Thuente, 1994) est basé sur l'ensemble

$$T(c_1) = \{\alpha > 0 : \phi(\alpha) \leq \phi(0) + \alpha c_1 \phi'(0), |\phi'(\alpha)| \leq c_1 |\phi'(0)|\}$$

Cet ensemble contient les valeurs de α qui satisfont les conditions de descente suffisante et de courbure pour $c_1 = c_2$. On montre facilement que tous les éléments de cet ensemble satisfont les conditions de Wolfe fortes, c'est-à-dire les conditions de descente suffisante et de courbure pour $c_1 \in (0, 1)$ et $c_2 \in (c_1, 1)$.

Les auteurs mentionnent que cet ensemble est non vide lorsque la fonction $\phi(\alpha)$ est bornée inférieurement. Notre critère étant défini positif, cette condition est alors remplie.

La fonction auxiliaire suivante est ensuite définie :

$$\psi(\alpha) \equiv \phi(\alpha) - \phi(0) - c_1 \phi'(0) \alpha.$$

Cette fonction est strictement positive lorsque la condition de descente suffisante n'est pas respectée, et négative lorsqu'elle l'est. Elle est nulle en $\alpha = 0$ et $\psi'(0) < 0$.

On montre ensuite que, s'il existe une longueur de pas α telle que

$$\psi(\alpha) > 0 \text{ ou } \psi'(\alpha) > 0,$$

alors il existe un $\alpha^* \in T(c_1)$ minimisant $\psi(\alpha)$ et $\psi(\alpha^*) < 0$. Cette longueur de pas satisfait alors les conditions de Wolfe fortes.

Soit un intervalle $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ donné. Le théorème 2.3 de Moré & Thuente (1994)

assure que si

$$\psi(\alpha_{\min}) \leq 0 \text{ et } \psi'(\alpha_{\min}) < 0$$

et

$$\psi(\alpha_{\max}) > 0 \text{ ou } \psi'(\alpha_{\max}) \geq 0,$$

c'est-à-dire qu'il existe un minimum pour $\psi(\alpha)$ à l'intérieur de cet intervalle, alors, sauf dans certains cas pathologiques, la méthode se termine après un nombre k fini d'itérations avec $\alpha_k \in T(c_1)$.

Les deux conditions sur les bornes α_{\min} et α_{\max} sont satisfaites assez facilement dans notre cas. En pratique, comme nous évoluons dans un contexte d'optimisation sans contrainte, il suffit de fixer $\alpha_{\min} = 0$ et α_{\max} suffisamment grand.

Conditions de descente suffisante et de courbure pour $c_1 > c_2$

La méthode permet, dans certaines conditions, de satisfaire les conditions de descente suffisante et de courbure dans le cas plus général où $c_1 \in (0, 1)$ et $c_2 \in (0, 1)$.

Ce cas est particulier puisque, lorsque $c_1 > c_2$, l'ensemble $T(c_1)$ peut être non vide, mais ne pas contenir d'élément satisfaisant les conditions de descente suffisante et de courbure. Un tel exemple est montré dans Moré & Thuente (1994).

Une modification de la méthode est proposée dans ce cas. Si une itérée α_k telle que $\psi(\alpha_k) \leq 0$ et $\phi'(\alpha_k) > 0$ est identifiée, alors l'objectif de la méthode change de la minimisation de la fonction $\psi(\alpha)$ pour celle de $\phi(\alpha)$.

En posant l'hypothèse que α_{\min} et α_{\max} sont tels que la fonction $\psi(\alpha)$ possède un minimum sur l'intervalle $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ Les auteurs montrent que si une itérée α_k telle

que

$$\psi(\alpha_k) \leq 0 \text{ et } \phi'(\alpha_k) > 0$$

est identifiée, ce qui indique la présence d'un minimum pour $\phi(\alpha)$ dans l'intervalle $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, alors la recherche linéaire modifiée se termine à une itérée α_k satisfaisant les conditions de descente suffisante et de courbure.

Ce cas ne se présente toutefois pas en pratique, car nous nous assurons que $c_1 < c_2$, ce qui est suffisant pour assurer la convergence de nos méthodes.

Recherche d'une longueur de pas

La recherche d'une longueur de pas débute par la spécification d'un intervalle de recherche à l'intérieur de $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ contenant une valeur α^* minimisant $\psi(\alpha)$. La borne α_{\max} est obtenue en essayant des valeurs croissantes pour α , jusqu'à ce que cette dernière résulte en $\psi(\alpha) > 0$ ou $\psi'(\alpha) > 0$. Enfin, des valeurs décroissantes pour α sont générées jusqu'à ce qu'on en obtienne une pour laquelle on a $\psi(\alpha) \leq 0$ et $\psi'(\alpha) < 0$.

Une fois l'intervalle de recherche spécifié, la taille de ce dernier est réduite en générant itérativement des valeurs d'essai qui en deviendront les nouvelles bornes. Le choix des valeurs d'essai est heuristique et est une combinaison des minima de diverses interpolations quadratiques et cubiques de la fonction aux bornes de l'intervalle. On démontre que la taille de ce dernier à chaque itération converge vers zéro et contient toujours un minimum, soit pour $\psi(\alpha)$ ou $\phi(\alpha)$ selon le cas, ce qui démontre que la méthode est convergente.

1.2.4.2 Méthodes de Labat

Nous présentons ici deux autres méthodes itératives de recherche linéaire. Ces dernières sont adaptées à la minimisation de critères des moindres carrés pénalisés par des fonctions décrivant des branches d'hyperboles telles que notre critère.

Les deux méthodes sont itératives et basées sur la formule de mise à jour suivante :

$$\begin{cases} \alpha_k^0 &= 0 \\ \alpha_k^{i+1} &= \alpha_k^i - \frac{\mathbf{d}_k^T \nabla f(\mathbf{x}_k + \alpha_k^i \mathbf{d}_k)}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{B}_i^k(\mathbf{x}_k + \alpha_k^i \mathbf{d}_k) \mathbf{d}_k} \\ \alpha_k &= \alpha_k^I \end{cases}.$$

Elles diffèrent par la formulation de la matrice $\mathbf{B}_i^k(\mathbf{x})$. Dans le premier cas, on utilise la construction de la méthode de Geman et Yang correspondant à notre critère :

$$\mathbf{B}_{\text{GY}} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \psi''(0) \sum_{m=1}^M w_m^2 (\mathbf{D}^{(m)})^T \mathbf{D}^{(m)}.$$

La deuxième méthode est obtenue en utilisant la construction de la méthode de Geman et Reynolds :

$$\mathbf{B}_{\text{GR}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \sum_{m=1}^M w_m^2 (\mathbf{D}^{(m)})^T \text{diag} \left\{ \frac{\psi'(|\mathbf{D}^{(m)} \mathbf{x}|_j)}{|\mathbf{D}^{(m)} \mathbf{x}|_j} \right\} \mathbf{D}^{(m)}.$$

Rappelons que $\psi(t)$ correspond à la fonction de pénalisation.

L'expression \mathbf{B}_{GY} équivaut à considérer que l'argument de la fonction de pénalisation est suffisamment proche de zéro, de sorte que $\psi''(t) \approx \psi''(0)$. Cette approximation résulte en une expression pour $\mathbf{B}_i^k(\mathbf{x})$ constante au cours des itérations de recherche linéaire. Le calcul de α_k^{i+1} est alors très efficace.

L'expression $\mathbf{B}_{\text{GR}}(\mathbf{x})$ varie au cours des itérations. Le produit doit alors être évalué à chaque itération de la recherche linéaire. L'approximation de la dérivée seconde de la fonction de pénalisation $\psi''(t) \approx \psi'(t)/t$, valable dans la région quadratique

de $\psi(t)$, permet de tenir compte davantage de la courbure locale de la fonction de pénalisation au point courant.

Ces deux méthodes seront comparées empiriquement à celle de Moré-Thuente à la section 4.2.3.

La convergence des deux méthodes est basée sur le théorème suivant (Labat and Idier, 2005) :

Si la fonction de pénalisation ψ vérifie les conditions suivantes :

1. $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{C}^2 , coercive et paire,
2. $\forall t > 0, \psi'(t) > 0$,
3. $\psi(\sqrt{t})$ est concave pour $t > 0$,
4. $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\psi''(t)| < \infty$,

alors l'algorithme du gradient conjugué non linéaire de Polak-Ribière, préconditionné par une matrice constante $\mathbf{M}_k = \mathbf{M}_0$ définie positive, est convergent dans le sens où

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| = 0.$$

Les auteurs énoncent que cette propriété de convergence est valable pour n'importe quel nombre d'itérations I .

1.2.5 Méthode employée

La méthode de Newton nécessite la résolution complète d'un système d'équations à chaque itération, ce qui est irréaliste pour un problème de la taille du nôtre. Nous pourrions alors avoir recours à des méthodes quasi-Newton utilisant une information de second ordre incomplète ou approximative. Ces méthodes demandent

toutefois une quantité significative de travail à chaque itération pour la mise à jour et l'utilisation de cette information de second ordre.

Nous avons choisi d'utiliser le gradient conjugué non linéaire. Cette méthode offre des performances intéressantes malgré sa grande simplicité. Ses performances peuvent de plus être améliorées à l'aide d'un préconditionneur adapté.

1.3 Problématique

Un certain nombre d'obstacles limitent l'utilisation des méthodes algébriques pour la reconstruction tomographique. En particulier, dans le contexte médical, la taille des données et des images reconstruites représente un problème considérable. Ces tailles sont de plus portées à augmenter à mesure que la technologie avance.

La prise en charge d'examens hélicoïdaux pour lesquels, plutôt que de reconstruire les données tranche par tranche, il est nécessaire de considérer d'un bloc tout le volume de données, constitue à cet égard un sérieux défi à relever dans un futur rapproché.

L'augmentation de la taille du problème a trois conséquences principales :

1. L'augmentation de l'encombrement mémoire dû à la matrice de projection, qui est déjà important.
2. L'augmentation du temps nécessaire au calcul des projections et des rétro-projections due à l'augmentation de la taille des opérateurs.
3. L'augmentation du nombre d'itérations de la méthode d'optimisation.

Remarquons que la réduction des artéfacts métalliques, qui est l'objectif du projet dans lequel s'inscrit ce travail, nécessite l'emploi d'un critère non linéaire. Le nombre d'itérations nécessaire à la minimisation de ce critère sera également porté

à augmenter, tout comme le volume de calcul pour chaque itération.

Ainsi, ce travail vise à trouver des méthodes qui permettront à la fois de limiter l'espace mémoire nécessaire au stockage de la matrice de projection, tout en assurant une bonne performance des opérations impliquant cette dernière. Le stockage explicite de la matrice de projection a pour objectif d'améliorer la performance des opérations de projection et de rétroprojection.

Enfin, nous souhaitons réduire le nombre d'itérations des méthodes d'optimisation par la création d'un préconditionneur et l'utilisation d'une méthode de recherche linéaire tenant compte des propriétés du problème.

1.4 Conclusion

Cette brève revue a permis de se faire une idée de l'évolution de la tomographie à rayons X, de la création du premier modèle aux appareils les plus récents. Cette évolution tend vers l'acquisition de plus en plus rapide de volumes de données de plus en plus imposants.

Nous avons ensuite abordé quelques aspects reliés à l'obtention d'une image représentative du coefficient d'atténuation. Deux modèles de projection dans un espace bidimensionnel, soit à rayons parallèles et à rayons en éventail, ont été énoncés.

La méthode des rétroprojections filtrées, ou une généralisation de cette dernière, permet de reconstruire les images. Ces méthodes sont liées à l'hypothèse que le nombre de photons émergeant de la source est déterministe.

On a toutefois vu qu'un modèle stochastique basé sur une loi de Poisson était plus physiquement réaliste. Pour en tenir compte, nous avons énoncé le cadre des

méthodes d'estimation basées sur le théorème de Bayes. Considérant un grand nombre de photons, nous avons convenu d'approximer le modèle de formation des données par une loi gaussienne. Le problème inverse correspondant est alors équivalent à la minimisation d'un critère des moindres carrés, que nous régularisons par une fonction L_2L_1 décrivant une branche d'hyperbole.

Nous avons ensuite vu quelques méthodes employées pour la minimisation de cette fonction. Nous avons choisi d'utiliser un algorithme du gradient conjugué non linéaire de Polak-Ribière (PR+) auquel nous allons, au chapitre 3, ajouter un préconditionneur.

La taille et la performance des méthodes sont les problèmes auxquels nous souhaitons nous consacrer dans ce travail. Les prochains chapitres détailleront les solutions mises en œuvre à cet effet.

CHAPITRE 2

PROJECTION ET RÉTROPROJECTION

Les opérations de projection et de rétroprojection sont au cœur de toute méthode de reconstruction. C'est particulièrement le cas pour les méthodes itératives que nous utilisons. Ces opérations nécessitent une part considérable des ressources informatiques affectées à la reconstruction.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode qui répond au premier objectif du travail, c'est-à-dire de mettre en œuvre de manière efficace les opérations de projection et de rétroprojection, en tenant compte de la géométrie de tomographes commerciaux.

Dans les modèles décrits au chapitre 1, il a été fait mention d'une matrice de projection. Elle n'est en fait qu'une représentation discrète des opérations de projection et de rétroprojection qui pourraient également être effectuées de manière analytique.

Les deux approches présentent des avantages et des inconvénients. L'utilisation d'une matrice permet d'effectuer les opérations de projection et de rétroprojection très rapidement, mais demande une quantité de mémoire importante. Le stockage de tous les coefficients d'une telle matrice n'est envisageable que pour des problèmes dont la taille est bien en deçà de celle d'un problème de taille clinique. À l'opposé, le calcul analytique des projections et des rétroprojections à chaque itération demande peu de mémoire, mais nécessite beaucoup de temps.

Nous avons cependant observé que la position des coefficients non nuls de la matrice présente une très forte structure, permettant de la stocker en un espace raisonnable.

En premier lieu, nous verrons que sous certaines conditions, qui seront détaillées à la section 2.2, un grand nombre de coefficients de la matrice sont redondants. On verra également, à la section 2.3, que la matrice est structurellement très creuse et que la position des coefficients non nuls présente une autre très forte structure.

L'exploitation de ces deux niveaux de structure permet de réduire le nombre de coefficients à emmagasiner jusqu'à un niveau permettant l'utilisation d'une matrice même pour de gros problèmes cliniques. Nous verrons que cette réduction de taille ne cause aucune perte d'information. Les résultats, présentés à la section 4.1, viendront montrer que sa mise en œuvre offre de très bonnes performances.

Les caractéristiques structurales que nous exploitons existent quel que soit le modèle de projection utilisé. Nous avons mentionné l'existence de géométries à rayons parallèles ou en éventail. Une certaine variété existe au niveau des fonctions d'échantillonnage des projections et de l'objet. Pour ce travail, nous utilisons des rayons infiniment minces traversant des échantillons carrés uniformes (pixels). L'utilisation d'échantillons circulaires traversés par des rayons épais est également proposée dans Allain (2002).

Avant de nous lancer dans l'analyse de cette structure et l'élaboration de notre méthode, nous énoncerons un cadre de base dans lequel nous définirons la convention géométrique et les divers symboles utilisés au cours du chapitre.

À la suite à l'analyse de la structure de l'opérateur de projection, nous entreprendrons une revue de quelques méthodes générales de stockage pour des matrices creuses. Certaines de ces méthodes ont servi d'inspiration pour le développement de la méthode adaptée à notre problème.

Nous entrerons ensuite plus en profondeur dans les méthodes mises en œuvre pour stocker et manipuler la matrice de projection. Les programmes développés dans le

cadre de ces travaux sont écrits et exécutés sous la plateforme Matlab. La solution retenue pour les opérations impliquant la matrice de projection utilise l'interface MEX intégrée à ce logiciel et permettant d'y inclure des fonctions écrites en langages C ou Fortran.

Comme ce travail est lié à une application utilisant les tomographes SOMATOM Sensation 16 et 64 de Siemens, certaines particularités géométriques de ces appareils, c'est-à-dire le décalage du détecteur et la source volante, seront détaillées. Ces aspects viennent significativement influencer l'espace occupé par la matrice, même si le nombre de coefficients de cette dernière reste constant.

2.1 Hypothèses et conventions géométriques

Nous débutons ce chapitre par la mise en place d'un cadre dans lequel s'inscrivent les développements des méthodes que nous avons mises en œuvre pour le calcul des projections et des rétroprojections. La formulation de ce cadre s'appuie sur la figure 2.1.

La position de la source est déterminée par son angle $\theta_s \in [0, 2\pi)$ et le rayon R_F de sa trajectoire circulaire autour de l'isocentre, c'est-à-dire l'origine du système d'axes. Nous considérons que la source tourne à vitesse constante dans le sens antihoraire. Son parcours débute à l'angle $\theta_s = 0$. Nous verrons à la section 2.3 que ce choix est justifié et qu'il a des répercussions sur la méthode employée pour le stockage des coefficients, notamment parce qu'il a une influence sur l'orientation des rayons correspondants.

Sur la figure 2.1, une projection en éventail constituée de $N_d = 16$ échantillons a été représentée. Quatre rayons ont été tracés. Le symbole $\theta_f \in [-\pi, \pi]$ représente l'angle de ces rayons par rapport au rayon central, c'est-à-dire celui qui passe par

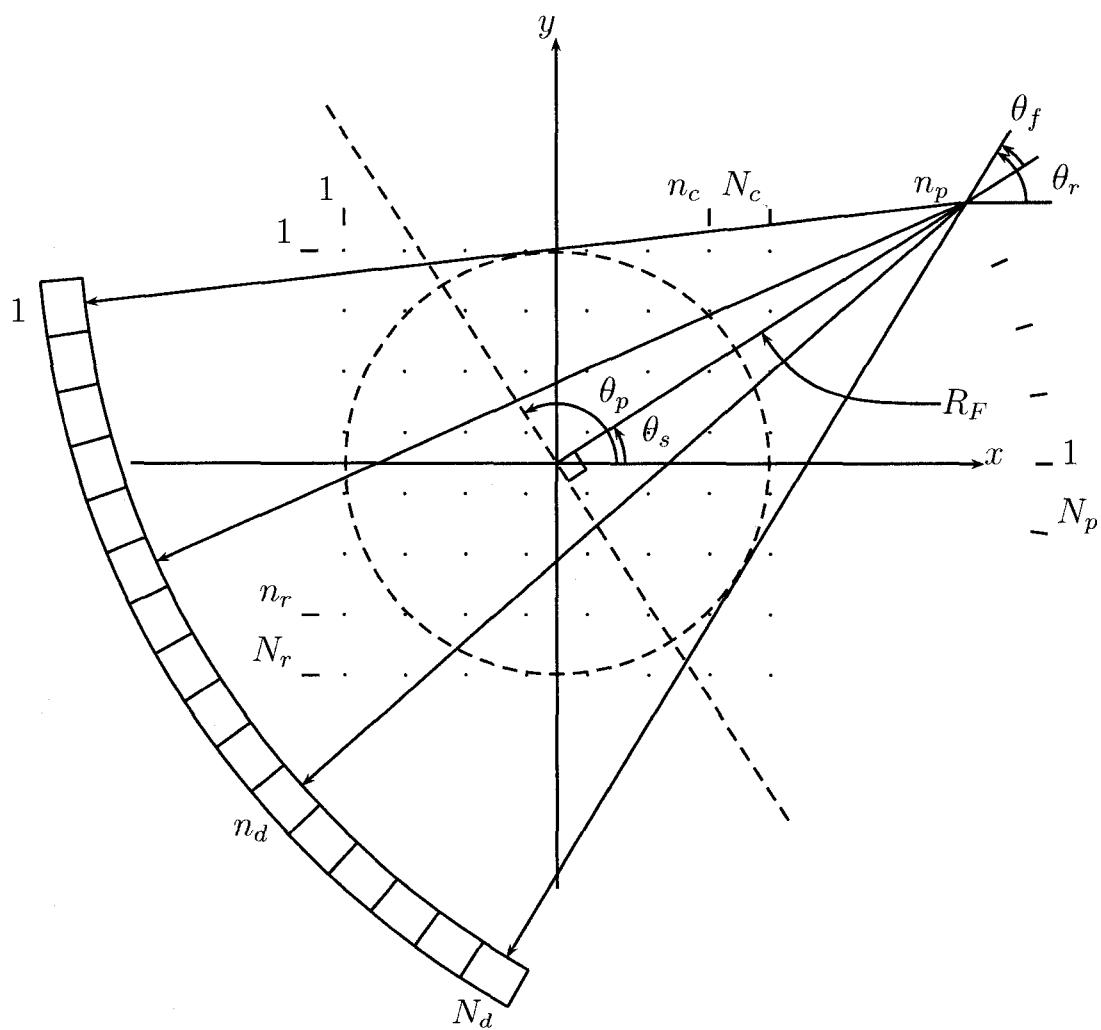


FIG. 2.1 Conventions et notations adoptées pour la matrice de projection.

la source et l'isocentre, qu'il soit physique ou non. Lorsque la source est à l'angle $\theta_s = 0$, le rayon considéré comme le premier, c'est-à-dire dont l'indice est $n_d = 1$, est celui se dirigeant vers le haut de la barrette de détecteurs et est d'angle $\theta_f < 0$.

Les rayons émis par la source sont alors caractérisés par leur angle θ_r , qui est la somme de l'angle θ_s de la source et de l'angle θ_f au sein de l'éventail, ainsi que par leur distance r par rapport à l'isocentre. L'intervalle de valeurs pour l'angle du rayon est alors $[-\pi, 3\pi)$.

Le champ de mesure correspond au cercle inscrit entre les rayons aux extrémités de l'éventail. Une grille carrée et centrée d'échantillons régulièrement espacés y est apposée. Cette grille est constituée de N_r lignes, auxquelles on réfère par l'indice $n_r \in [1, N_r]$, et N_c colonnes identifiées par l'indice $n_c \in [1, N_c]$. Sur la figure 2.1, elle est inscrite dans le champ de mesure, mais elle pourrait en pratique ne pas le couvrir entièrement.

Nous supposons que la fonction d'échantillonnage $b(x, y)$ vue à la section 1.1.3.3 est symétrique par rapport aux axes situés aux angles multiples de $\pi/4$. Les pixels carrés ou circulaires satisfont cette condition.

Les unités utilisées sont arbitraires. Cependant, le coefficient d'atténuation étant exprimé en cm^{-1} , l'expression des longueurs en centimètres est préférée, ce qui permet d'éviter de devoir effectuer des conversions.

2.2 Redondance des projections

L'objectif de cette section est de montrer que, sous certaines conditions, la géométrie du système est invariante par rapport à certaines transformations, c'est-à-dire qu'elle reste identique après avoir subi une combinaison de ces transformations.

Cette observation permet de réaliser qu'un grand nombre de lignes de la matrice de projection peuvent être redondantes. Il est alors nécessaire de calculer et d'emmagasiner seulement une partie d'entre elles. De simples opérations permettent de retrouver les coefficients redondants à partir de ceux qu'on a stockés.

Sous les hypothèses énoncées à la section précédente, la grille d'échantillons est invariante par symétrie selon quatre axes, que nous noterons (x, y, u, v) , respectivement aux angles $0, \pi/2, \pi/4$ et $3\pi/4$, se croisant à l'isocentre. Elle est de plus invariante par rapport aux rotations d'angles multiples de $\pi/2$ autour de l'isocentre.

L'invariance par rapport à ces transformations est observable pour tout le système grille-projections si certaines conditions sur le nombre et la forme des projections sont satisfaites.

Pour observer une invariance par symétrie, il est d'abord nécessaire que les rayons au sein des projections soient disposés de manière symétrique par rapport au rayon central. Cette condition est suffisante pour assurer la symétrie par rapport à l'axe x . Par la suite, un nombre N_p pair de projections assure l'invariance par symétrie par rapport à l'axe y , alors qu'un nombre de projections multiple de 4 assure l'invariance par symétrie par rapport aux axes u et v .

Nous illustrons ces conditions à la figure 2.2. Les positions successives de la source pour des nombres de projections impair (figure 2.2(a)), pair (figure 2.2(b)) et multiple de 4 (figure 2.2(c)) sont représentées par des points. Pour la projection $n_p = 2$, les projections obtenues par des symétries par rapport aux quatre axes sont représentées par des traits pointillés. La grille d'échantillons est représentée par un carré. Lorsqu'une projection obtenue par symétrie coïncide avec une des positions de la source, le système possède une invariance à la symétrie par rapport à l'axe correspondant.

TAB. 2.1 Conditions pour que la matrice de projection soit invariante par rapport à certaines transformations, et intervalle d'angles de la source pour lesquels on doit calculer les coefficients.

Conditions satisfaites	Invariance par	Angles nécessaires
Aucune	Aucune	$[0, 2\pi)$
N_p pair	Rotation d'angle π	$[0, \pi)$
N_p multiple de 4	Rotations d'angle $\pi/2$	$[0, \pi/2)$
Projections symétriques	Symétrie	$[0, \pi]$
Projections symétriques et N_p pair	Symétrie et Rotation d'angle π	$[0, \pi/2]$
Projections symétriques et N_p multiple de 4	Symétrie et Rotation d'angle $\pi/2$	$[0, \pi/4]$

Enfin, un nombre pair de projections assure l'invariance par rotation d'un angle multiple de π que les projections soient symétriques ou non. Lorsque ce nombre est un multiple de 4, on observe, en plus, une invariance par rapport aux rotations d'angles multiples de $\pi/2$.

Ces conditions sont illustrées à la figure 2.3 où on montre les projections obtenues par des rotations de $\pi/2$, π et $3\pi/2$.

Le tableau 2.1 associe les conditions sur la géométrie du système aux transformations laissant invariante la matrice de projection et l'intervalle d'angles de la source pour lesquels il est, par conséquent, nécessaire de calculer les coefficients de la matrice. Notons que des combinaisons de seulement trois de ces transformations suffisent à recouvrir les coefficients manquants de la matrice.

Les conditions menant à des redondances, qui permettent de ne générer qu'une

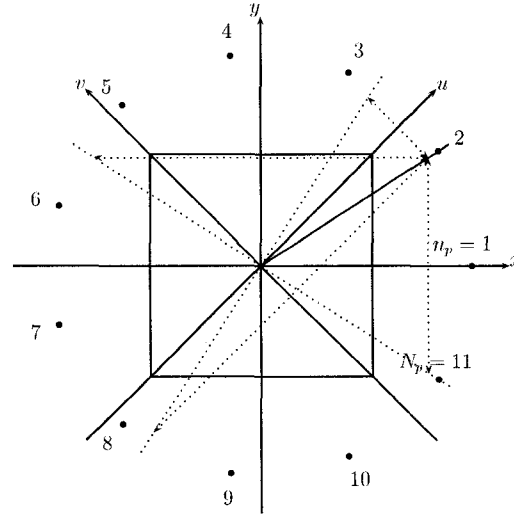
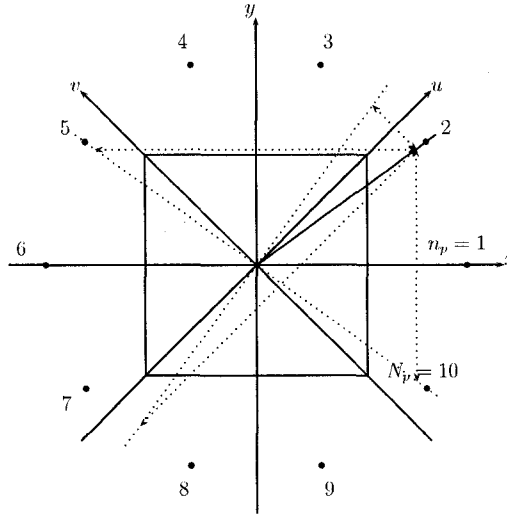
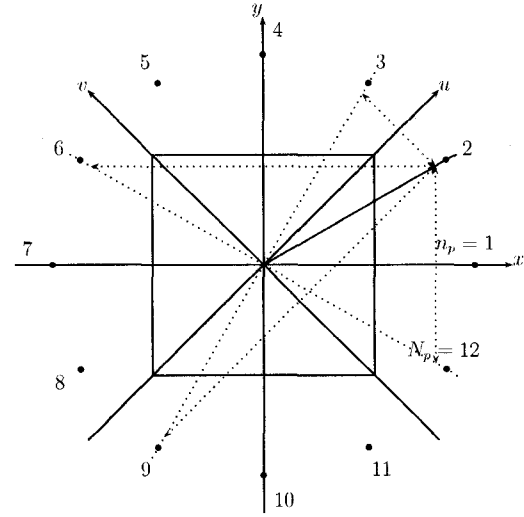
(a) N_p impair.(b) N_p pair.(c) N_p multiple de 4.

FIG. 2.2 Illustration des conditions assurant l'invariance par symétrie.

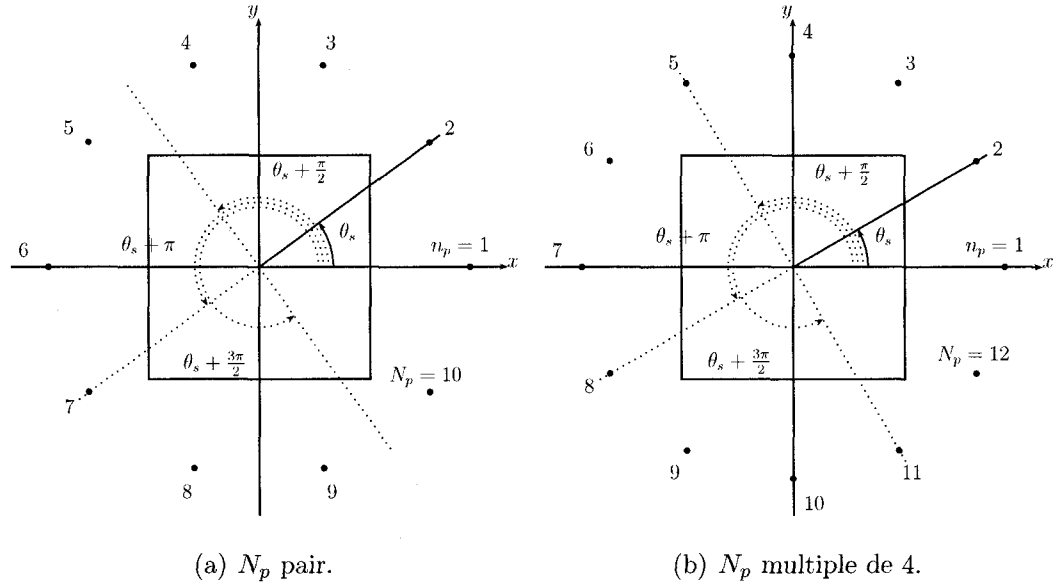


FIG. 2.3 Illustration des conditions assurant l'invariance par rotation.

partie de la matrice, viennent d'être établies. Nous verrons, à la section 2.5.5, comment sont mises en œuvre les opérations sur la matrice lorsque seules les lignes non redondantes sont emmagasinées.

Avant d'en arriver là, portons notre attention sur la structure des lignes qui permet de les emmagasiner de manière efficace.

2.3 Structure des coefficients

Malgré la possibilité de ne calculer et de ne stocker qu'une partie des coefficients de la matrice, le nombre de coefficients à conserver en mémoire demeure très élevé. Prenons l'exemple d'une matrice construite à partir des paramètres géométriques du tomographe de Siemens que nous souhaitons utiliser (voir l'annexe I). Dans le cas le plus simple, en ne prenant qu'un modèle à rayons minces, cette matrice est constituée d'environ $2,0 \times 10^{11}$ coefficients dont $2,6 \times 10^{10}$ qui ne sont pas redondants

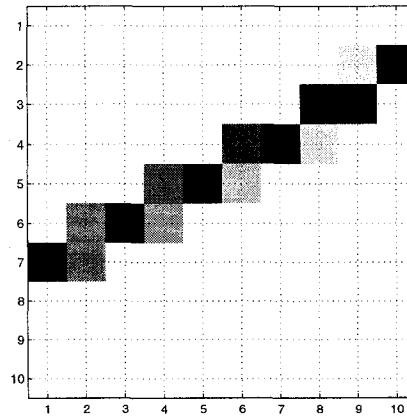


FIG. 2.4 Illustration d'une ligne de la matrice de projection sous forme d'une image.

et doivent donc être emmagasinés.

Chaque coefficient de la matrice de projection indique l'importance d'un échantillon de l'image à un échantillon des projections. Nous avons vu, à titre d'exemple, un modèle où chaque coefficient se trouve à être la longueur du parcours du rayon dans chaque pixel carré de l'image. Ainsi, chaque ligne de la matrice pondère l'importance des échantillons de l'image à un échantillon des projections et correspond à un rayon d'une des projections.

Les coefficients correspondant à des échantillons de l'image n'intersectant pas le rayon sont évidemment nuls. Seule une petite proportion des coefficients d'une ligne est alors non nulle. La position de ces coefficients est, de plus, fortement structurée. On montrera que cette structure permet de mettre au point une méthode de stockage ligne par ligne efficace de la matrice. Cette dernière apparaît clairement lorsqu'on considère celle-ci en deux dimensions. Un exemple est donné à la figure 2.4.

Observons les lignes du bloc ainsi formé. Une analyse équivalente peut être effectuée

considérant les colonnes. Le trajet d'un rayon, peu importe qu'il soit fin ou large, trace sur l'image un patron formé d'un certain nombre de segments horizontaux (ou verticaux). Dans tous les cas, on retrouve au plus un seul segment sur une ligne de l'image, et ce dernier est nécessairement continu. Ces segments sont, de plus, disposés sur un certain nombre de lignes contiguës. Ce nombre est très inférieur à la taille de l'image pour autant que l'orientation du rayon tende vers l'horizontale. Le nombre de lignes vides entourant les données augmente alors en proportion.

Nous sommes donc à la recherche d'une méthode de stockage de matrices creuses qui tienne compte de cette structure.

2.4 Stockage sans pertes de matrices creuses

La décision prise, qui sera réitérée lorsqu'on traitera plus en profondeur de notre méthode, est de stocker individuellement chaque ligne de la matrice. Cette information est importante à ce point, puisque la structure de la matrice se ramène à la structure de ses lignes.

Un grand nombre de méthodes, tant générales que spécialisées, permettent d'emmagasiner plus ou moins efficacement des matrices creuses. La méthode à privilégier pour une matrice particulière dépend de ses propriétés. Dans cette section, nous explorons quelques méthodes générales qui, considérant la structure de notre matrice, se sont avérées plus inspirantes dans le développement de notre méthode de stockage.

Les informations concernant ces formats proviennent de deux documents (Barrett et al., 1994 ; Saad, 1994) faisant la revue des principales méthodes générales. Nous expliquons brièvement celles qui s'appliquent le mieux à notre problème.

2.4.1 Format par coordonnées

Ce format est probablement le plus simple auquel on puisse penser. Il nécessite d'emmagasiner trois vecteurs. Le premier contient les coefficients non nuls de la matrice. Les deux autres conservent respectivement la ligne et la colonne de chacun des coefficients. Enfin, il est nécessaire d'utiliser un entier indiquant le nombre de données présentes.

L'ordre des coefficients n'a aucune importance. Nous représentons tout de même le bloc de l'exemple en prenant une par une ses lignes, ce qui est illustré au tableau 2.2. Ce format est efficace lorsque le nombre de coefficients à emmagasiner est faible par rapport à la taille de la matrice et qu'aucune structure n'est apparente.

TAB. 2.2 Bloc de l'exemple stocké par coordonnées.

Coefficients	0,4	6,3	5,8	6,0	5,0	6,3	0,5	4,1	6,3	1,3
Colonnes	9	10	8	9	6	7	8	4	5	6
Lignes	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5
Coefficients	3,3	6,3	2,2	6,3	3,1					
Colonnes	2	3	4	1	2					
Lignes	6	6	6	7	7					

Pour chaque coefficient, on doit emmagasiner deux entiers. Le bloc considéré étant constitué 15 coefficients non nuls lignes, il faut donc emmagasiner 15 coefficients et 30 entiers.

2.4.2 Compression par colonnes

Aussi appelée méthode de Harwell-Boeing, la méthode de compression par colonnes est également parmi les plus simples. Elle est généralement plus efficace que la méthode par coordonnées. Une matrice creuse y est représentée par trois vecteurs. Le premier contient les coefficients placés dans une séquence obtenue en effectuant un balayage colonne par colonne de la matrice. Pour chaque composante de ce vecteur, on conserve, dans un autre vecteur, l'indice de sa rangée dans la matrice. Enfin, on conserve un vecteur dont la taille est un de plus que le nombre de colonnes de la matrice. Chacune des composantes de ce vecteur indique la position, dans le premier vecteur, du coefficient débutant la colonne concernée. La dernière composante permet de détecter la fin du vecteur des coefficients et est définie comme la longueur de ce vecteur plus un.

Ce format est celui qu'utilise Matlab pour emmagasiner les matrices creuses (The MathWorks, Inc., 2007).

On illustre, au tableau 2.3, comment emmagasiner, en compression par lignes, le bloc représenté à la figure 2.4.

TAB. 2.3 Matrice creuse compressée par colonnes.

Coefficients	6,3	3,3	3,1	6,3	4,1	2,2	6,3	5,0	1,3	6,3
Lignes	7	6	7	6	5	6	5	4	5	4
Nouv. col.	1	2		4	5		7	8		10
Coefficients	5,8	0,5	0,4	6,0	6,3	(16)				
Lignes	3	4	2	3	2					
Nouv. col.	11		13		15					

Comme le bloc comprend 10 lignes, les 15 coefficients non nuls qu'il contient

tiennent sur l'espace de 15 valeurs à virgule flottante et 26 entiers. C'est quatre de moins que la méthode précédente.

2.4.3 Compression par lignes

La stratégie de compression par lignes est semblable à ce qui a été présenté à la section précédente, excepté qu'on représente la matrice sous forme d'une série de lignes plutôt que de colonnes. Les coefficients non nuls sont obtenus en balayant la matrice ligne par ligne. On conserve ensuite un vecteur des colonnes de chacun des coefficients et un vecteur indiquant le début de chacune d'elles dans le vecteur des coefficients. Les trois vecteurs contiennent les valeurs figurant au tableau 2.4.

TAB. 2.4 Matrice creuse compressée par lignes.

Coefficients	0,4	6,3	5,8	6,0	5,0	6,3	0,5	4,1	6,3
Colonnes	9	10	8	9	6	7	8	4	5
Nouv. lig.	0	1		3	5			8	
Coefficients	1,3	3,3	6,3	2,2	6,3	3,1			
Colonnes	6	2	3	4	1	2			
Nouv. lig.		11			14		0	0	0 (16)

Considérant que le bloc est constitué de 10 colonnes, on doit ici aussi conserver en mémoire 26 entiers en plus du vecteur de données.

Dans tous les cas, pour une matrice carrée, la taille occupée en mémoire sera la même pour une matrice stockée par lignes ou par colonnes. La différence au niveau du nombre d'entiers survient lorsque la matrice est rectangulaire. Il sera alors avantageux de stocker la matrice par lignes lorsqu'elle sera formée de moins de lignes que de colonnes.

2.4.4 Format Ellpack-Itpack

Ce format nécessite d'identifier le nombre N maximal de coefficients non nuls dans une ligne de la matrice. Ces coefficients sont conservés dans un tableau rectangulaire de N_r lignes et N colonnes. Pour chaque coefficient, on inscrit, dans un tableau de mêmes dimensions, l'indice de sa colonne. Un espace pour conserver la valeur de N est, de toute évidence, également nécessaire.

Une stratégie par rapport aux colonnes peut être utilisée et serait plus efficace pour une matrice contenant un plus grand nombre de colonnes que de lignes.

Le tableau 2.5 illustre les deux structures de données correspondant à ce format. On note que $N = 3$ pour ce cas.

TAB. 2.5 Bloc de l'exemple emmagasiné dans le format Ellpack-Itpack.

Coefficients			Colonnes		
0	0	0	0	0	0
0,4	6,3	0	9	10	0
5,8	6,0	0	8	9	0
5,0	6,3	0,5	6	7	8
4,1	6,3	1,3	4	5	6
3,3	6,3	2,2	2	3	4
6,3	3,1	0	1	2	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

On note que 15 zéros sont explicitement représentés en mémoire. Au total, le bloc occupe 30 emplacements de valeurs à virgule flottante et 31 espaces d'entiers.

2.5 Méthodes mises en œuvre

La structure décrite à la section 2.3 étant présente au niveau de chaque ligne de la matrice, il est naturel d'employer une stratégie de stockage ligne par ligne. Ainsi, nous avons créé un vecteur dont chacune des composantes correspond à une ligne de la matrice.

Les méthodes qu'on vient de présenter de façon très générale sont celles qu'on a identifiées comme présentant un intérêt pour le stockage des lignes (ou blocs) de la matrice. Ces blocs, qu'on cherche à emmagasiner, sont tels que certains aspects de ces méthodes peuvent être modifiés pour en améliorer l'efficacité de stockage.

La prochaine section fait le lien entre les méthodes générales qu'on vient de voir et celles qu'on a mises en œuvre. Par la suite, nous justifierons le choix de la plateforme de développement. La manière d'accéder aux données contenues dans chaque bloc, la création de la matrice, la mise en œuvre des opérations de produit de la matrice par des vecteurs et, enfin, la sauvegarde et le chargement d'une matrice sur disque suivront.

2.5.1 Structures pour le stockage des lignes de la matrice

Cette section a pour objectif de décrire les deux structures développées pour emmagasiner les blocs de la matrice de projection. Ces deux structures sont suffisamment semblables pour qu'il soit difficile de les départager sans les comparer de manière empirique.

La plupart des méthodes générales ont été présentées dans une perspective de stockage de segments horizontaux. Ces méthodes peuvent toutefois, de manière évidente, être appliquées au stockage de segments verticaux. De même, la structure

des coefficients peut tout aussi bien être vue comme une série de segments verticaux plutôt qu’horizontaux.

Le choix de l’orientation des segments est basé sur l’orientation la plus fréquente des rayons. Nous avons vu à la section 2.2 qu’il était possible, dans le meilleur des cas, de ne conserver que le premier huitième des lignes de la matrice. Les rayons correspondants sont alors presque tous à dominance horizontale. Ainsi, la plupart des blocs sont formés d’un faible nombre de longs segments horizontaux. De ce constat émerge une nette préférence pour stocker une série de segments horizontaux plutôt que verticaux.

Dans le but de développer une méthode pour emmagasiner les blocs, discutons des propriétés des méthodes générales exposées précédemment.

Revenons premièrement au format de compression par lignes. Dans le cas où on conserve la ligne de la matrice correspondant à un rayon dont l’orientation est plus près de l’horizontale que de la verticale, considérant que dans l’énorme majorité des cas, un rayon est de largeur faible par rapport à la taille de l’image, un nombre significatif des lignes du bloc se trouvent à être vides. Avec ce format, on conserve malgré tout un entier identifiant le premier coefficient de chaque ligne, vide ou pas. Nous avons, de plus, montré que les lignes non vides étaient contiguës. Il est clair que l’utilisation de deux entiers, l’un indiquant la première ligne contenant des coefficients non nuls, l’autre indiquant la dernière, apporteront un réel bénéfice. On note que cette mesure portera fruit dès que plus de deux lignes seront vides.

Le même raisonnement peut être appliqué aux segments individuels du bloc de sorte que, pour chacun d’eux, on conserve une paire d’entiers indiquant la position où il débute et la position où il se termine, ou sa longueur. Ici, un gain d’espace est réalisé, par rapport à une compression par lignes, dès qu’un segment est de

longueur supérieure à deux.

Nous avons ciblé la méthode Ellpack-Itpack comme étant potentiellement adaptée à la structure de nos blocs. Là aussi on considère qu'un gain important d'espace peut être effectué en ne considérant que les lignes non complètement nulles. Ce gain est plus substantiel encore (en termes relatifs) que celui réalisé pour la compression par lignes. Dès qu'on élimine un coefficient nul, cela se traduit par la libération d'un espace équivalent à trois entiers (considérant des nombres à virgule flottante à double précision). On s'attend tout de même à ce que quelques zéros persistent dans la structure de données, mais en nombre restreint. On anticipe que ce nombre sera plus important aux bords de l'image, certains segments pouvant être coupés à ces endroits.

L'hypothèse de segments continus et de même longueur permet d'imaginer une autre structure potentiellement intéressante pour notre application. Pour chacun, connaissant la position du premier élément, on déduit facilement la position du dernier. Ainsi, de N entiers par ligne avec Ellpack-Itpack, on se retrouve devant la nécessité de n'en conserver qu'un seul.

On remarque enfin que si, considérant des longueurs de segments variables, on conserve la position des extrémités de chacun d'eux, on retombe exactement sur le format obtenu en modifiant la compression par lignes.

On se retrouve alors avec deux formats candidats pour la mise en œuvre, soit la méthode inspirée de la compression par lignes (méthode à segments de taille variable) ou de la méthode Ellpack-Itpack (méthode à segments de taille fixe).

Il est difficile de trancher en faveur de l'une ou l'autre des méthodes simplement à partir de leur structure. La première n'admet aucun zéro dans les données, mais nécessite plus d'éléments structurants. L'autre pourrait éventuellement emmagasi-

ner quelques zéros, mais sa structure est plus légère.

Les deux méthodes ont alors été mises en œuvre. Notre choix s'est arrêté sur la méthode à segments de longueur fixe. Les résultats justifiant ce choix sont présentés aux sections 4.1.1 et 4.1.2. Il tient compte de l'efficacité du stockage ainsi que des temps de calcul des opérations avec les deux méthodes. Les tableaux 2.6 et 2.7 illustrent les divers éléments devant être emmagasinés avec les deux méthodes dans le cadre de l'exemple de la section 2.3.

TAB. 2.6 Valeurs emmagasinées pour la méthode à segments de longueur fixe. Noter la présence de trois zéros.

Première ligne	2									
Dernière ligne	7									
Taille segments	3									
Premières colonnes	8	8	6	4	2	1				
Coefficients	0,0	0,4	6,3	5,8	6,0	0,0	5,0	6,3	0,5	4,1
	6,3	1,3	3,3	6,3	2,2	6,3	3,1	0,0		

TAB. 2.7 Valeurs emmagasinées pour la méthode à segments de longueur variable.

Première ligne	2									
Dernière ligne	7									
Premières colonnes	8	8	6	4	2	1				
Dernières colonnes	10	9	8	6	4	2				
Coefficients	0,4	6,3	5,8	6,0	5,0	6,3	0,5	4,1	6,3	1,3
	3,3	6,3	2,2	6,3	3,1					

2.5.2 Plateforme de développement

L'ensemble des programmes développés pour ce projet l'ont été sous la plateforme Matlab. Cette plateforme a l'avantage de fournir, via l'utilisation d'un langage interprété d'une grande simplicité, un bon nombre d'outils mathématiques et de visualisation permettant un développement rapide.

Nous proposons une méthode qui ne fait pas partie de celles qui sont fournies par Matlab. Le développement de cette dernière a été fait en langage C. L'interface MEX, qui est une fonctionnalité de Matlab a été utilisée pour l'intégration de ces méthodes à l'environnement Matlab.

La mise en œuvre nécessite un grand nombre d'accès mémoire en plus de plusieurs niveaux de boucles imbriquées pour lesquels on recherche un maximum de performance. Jusqu'à tout récemment, les performances de Matlab pour ces opérations n'étaient pas du tout suffisantes pour assurer des opérations efficaces sur la matrice. Les avantages d'un langage compilé par rapport à un langage interprété sont indéniables à ce niveau.

Nous avons pris soin de séparer au maximum la partie fonctionnelle du code de la partie interface, de sorte que l'utilisation de nos programmes par un programme écrit complètement en C, ou sous une autre plateforme, par le biais d'une autre interface, puisse se faire aisément.

Un commentaire doit être fait ici pour éviter certains conflits de notation. En effet, Matlab adopte une indexation des tableaux à partir de 1, alors qu'en C, cette dernière est faite à partir de 0. La notation utilisée jusqu'ici est celle de Matlab. Nous conserverons cette notation malgré que les méthodes soient mises en œuvre en C.

2.5.3 Accès aux données d'un bloc

On explique ici comment obtenir un coefficient particulier de la matrice de projection. L'accès aux données pour les deux méthodes présente de légères différences que nous évoquons ici.

En premier lieu, l'accès à une ligne particulière de la matrice est direct et se fait de manière identique dans les deux cas : l'indice de la ligne correspond à l'indice du bloc.

L'accès à une colonne de la matrice est cependant différent et considérablement plus rapide pour la structure à segments de longueur fixe. La première étape, dans les deux cas, consiste à déterminer dans quelle ligne n_r et quelle colonne n_c du bloc le coefficient se trouve. Il est ensuite facile de déterminer, à partir de n_r et de l'indice de la première ligne non vide, l'indice du segment correspondant.

Lorsque la longueur des segments est fixe, on détermine ensuite directement l'indice de la composante du vecteur de données correspondant au premier élément de ce segment. Pour une structure à segments de taille variable, toutefois, il est nécessaire d'additionner la taille de tous les segments qui le précèdent, ce qui demande un temps significatif.

Enfin, connaissant la colonne n_c où débute le segment, on détermine, à quel endroit se trouve le coefficient recherché.

2.5.4 Génération de la matrice

Dans cette section, nous expliquons les étapes de la construction de la matrice. Nous ferons encore une fois référence à l'exemple que nous avons introduit à la section

2.3. Il est nécessaire à ce point de détailler davantage le contexte dans lequel il s'inscrit. Les paramètres utilisés pour la construction de la matrice de l'exemple sont énumérés dans le tableau 2.8.

TAB. 2.8 Paramètres pour la construction de la matrice de l'exemple.

Paramètre	Valeur
Modèle de projection	éventail
Modèle de rayon	mince
Nombre de projections	$N_p = 1160$
Nombre de détecteurs	$N_d = 672$
Écart angulaire entre les détecteurs	$\Delta\theta_f = 2\pi/4640$
Distance de la source à l'isocentre (mm)	$R_F = 570$
Taille de l'image (échantillons)	10
Taille de l'objet (mm)	558

Ces paramètres suffisent à déterminer complètement une matrice de projection pour des projections en éventail symétrique composées de rayons minces. Cependant, d'autres modèles de projection ou de rayon peuvent nécessiter des paramètres additionnels. On en verra des exemples ultérieurement lorsque viendra le temps de traiter des particularités du tomographe que nous utilisons pour nos expériences.

Le bloc illustré jusqu'ici correspond au détecteur d'indice $n_d = 280$ de la projection d'indice $n_p = 106$. L'angle et la distance du rayon au centre sont respectivement de $\theta_r = 1,44$ radians et de $r = -42,80$ millimètres.

2.5.4.1 Identification des lignes redondantes

La première étape de la construction consiste à identifier, à partir des paramètres géométriques, quelles lignes de la matrice doivent être calculées et quelles transformations permettent de récupérer les autres.

L'éventail étant symétrique, on a, dans tous les cas, la possibilité d'utiliser la symétrie par rapport à l'axe x . Un nombre de projections pair fait en sorte qu'on peut utiliser une rotation de π . S'il est également multiple de quatre, on peut alors aussi effectuer des rotations de multiples entiers de $\pi/2$ pour retrouver des coefficients redondants.

Pour l'exemple, on constate qu'on se trouve dans le cas le plus favorable et que seules les lignes de la matrice correspondant aux angles de la source allant de 0 à $\theta_{s\max} = \pi/4$ sont nécessaires.

2.5.4.2 Allocation de la structure

Vient ensuite l'étape de l'allocation de l'espace nécessaire à la structure de la matrice. La spécification détaillée de cette structure se trouve à l'annexe III. Cette étape prend la forme de la création d'un vecteur de blocs vides, un pour chaque ligne emmagasinée, qui seront remplis ultérieurement. Le nombre de blocs est égal au produit du nombre de projections à calculer et du nombre d'échantillons de celles-ci.

2.5.4.3 Paramétrisation des rayons

Il est nécessaire, pour chaque détecteur n_d de chaque projection n_p , de déterminer les paramètres du rayon correspondant. On rappelle que ces paramètres correspondent au bloc d'indice

$$i = N_d(n_p - 1) + n_d.$$

Pour un nombre total N_p de projections, dont on calcule la contribution des N_{ps} premières, comprenant chacune N_d échantillons, l'angle de la source, pour la projection d'indice $n_p \in [1, N_{ps}]$, est décrit par

$$\theta_s = \frac{2\pi(n_p - 1)}{N_p}.$$

On aura ainsi

$$\theta_{s\max} = \frac{2\pi(N_{ps} - 1)}{N_p}.$$

De même, pour l'angle du rayon correspondant au détecteur $n_d \in [1, N_d]$, on a

$$\theta_f = \Delta\theta_f \left[n_d - \frac{N_d - 1}{2} \right].$$

On rappelle l'expression pour l'angle du rayon

$$\theta_r = \theta_s + \theta_f$$

et la distance entre ce dernier et l'isocentre

$$r = R_F \sin \theta_f.$$

Pour chaque rayon ainsi caractérisé, la contribution des échantillons de l'image doit ensuite être évaluée.

2.5.4.4 Calcul des coefficients d'une ligne de la matrice

Une fois un rayon paramétrisé, on calcule finalement la contribution des échantillons de l'image à la projection qu'il engendre. Cette étape permet une grande souplesse au niveau du modèle utilisé : rayons minces ou épais, différentes fonctions d'échantillonnage.

En plus des paramètres du rayon, qu'on vient de voir, on a besoin, pour l'exécution de cette partie de la procédure, des paramètres de la grille d'échantillons, soit leur nombre et leur espacement en plus de tout autre paramètre particulier au modèle utilisé, par exemple, la largeur du rayon, ou un paramètre que nécessiterait une autre fonction d'échantillonnage.

TAB. 2.9 Intersections à l'intérieur de l'objet en ordre croissant de y .

x_{inter}	27.9	22.3	21.8	16.7	11.4	11.2	5.6	0.9	0.0	-5.6
y_{inter}	-20.0	-17.0	-16.7	-14.0	-11.2	-11.0	-8.1	-5.6	-5.1	-2.1
x_{inter}	-9.6	-11.2	-16.7	-20.0	-22.3	-27.9				
y_{inter}	0.0	0.8	3.8	5.6	6.8	9.8				

Un certain nombre de paramètres essentiels à la construction du bloc ne sont connus qu'à la fin des calculs, rendant nécessaire l'utilisation d'une structure temporaire, soit le nombre de coefficients non nuls ou la longueur des segments. Le bloc est, tant pour la structure à segments de taille fixe que pour celle à segments de taille variable, construit à partir de cette structure temporaire. La méthode de calcul est alors très similaire dans les deux cas.

Pour le modèle de projection considéré, c'est-à-dire la longueur de l'intersection de rayons minces et de pixels carrés, le calcul débute par la détermination des points d'intersection entre les bordures des pixels et le rayon. Vu la structure selon

laquelle on emmagasine chacun des blocs, c'est-à-dire ligne par ligne de la première à la dernière, les points d'intersection doivent être triés en ordonnées croissantes. Pour l'exemple considéré, on obtient les points représentés dans le tableau 2.9.

Le nombre d'intersections est indicateur du nombre total de coefficients non nuls que contient le bloc. Il y a toujours une intersection de plus que le nombre de pixels que le rayon traverse. Ainsi, un vecteur temporaire de cette taille est créé, dans lequel les coefficients seront accumulés.

Le calcul de la valeur des coefficients s'effectue en prenant les points d'intersection par paires et en y appliquant simplement le théorème de Pythagore. Le milieu du segment de droite joignant les deux points d'intersection permet de déterminer la position de l'échantillon dans le bloc.

À mesure qu'on calcule la valeur des coefficients et qu'on les accumule, on met à jour l'indice de la première et de la dernière ligne du bloc où se trouve un coefficient non nul. Pour chaque ligne, on met également à jour, dans deux vecteurs temporaires de la taille du nombre de lignes du bloc, les colonnes du premier et du dernier coefficient non nul.

À ce point, il est nécessaire de faire la distinction entre deux cas concernant l'ordre des coefficients dans le vecteur. Lorsque la pente du rayon est négative, les abscisses des points d'intersection sont en ordre croissant. Pour chaque segment, les coefficients correspondants sont alors disposés en ordre croissant de colonne dans le vecteur. À l'opposé, lorsque sa pente est positive, les coefficients sont disposés en ordre décroissant de colonne. Dans ce cas, il est nécessaire d'inverser l'ordre des coefficients de chaque segment.

Une fois ces étapes complétées, il est maintenant possible de construire le bloc. Pour un bloc à segments de taille variable, il suffit de créer les deux vecteurs indiquant,

pour chaque ligne non vide, la colonne où elle débute et celle où elle se termine. Les indices de la première et de la dernière lignes sont déjà correctement définis et le vecteur de coefficients est correctement construit.

La construction d'un bloc à segments de taille fixe demande aussi de créer un vecteur indiquant la colonne du premier coefficient de chaque segment. Toutefois, plutôt que d'extraire aussi la colonne du dernier coefficient, on calcule la longueur maximale des segments.

Le vecteur qui contiendra les coefficients peut maintenant être créé. La taille de ce dernier est égale au produit du nombre de lignes non nulles et de la longueur maximale des segments.

On remplit finalement ce tableau en parcourant tous les segments un par un. Le nombre de zéros à ajouter à chaque segment est calculé en premier. Ces zéros sont ajoutés prioritairement à la fin de chaque segment, mais il arrive fréquemment que le segment ainsi étendu dépasse la bordure du bloc. Les zéros excédentaires sont, dans ce cas, placés au début du segment. Les coefficients sont copiés dans ce vecteur, ce qui complète la construction du bloc.

2.5.5 Produits matrice-vecteur

Deux formes de produits matrice-vecteur sont nécessaires pour effectuer la reconstruction, soit le produit de la matrice par un vecteur colonne (projection) et le produit de sa transposée par un vecteur colonne (rétroprojection). Sans avoir à transposer la matrice, le dernier produit peut être effectué considérant que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} = (\mathbf{y}^T \mathbf{A})^T;$$

ainsi, on a plutôt mis en œuvre le produit du vecteur ligne \mathbf{y}^T par la matrice.

La méthode pour réaliser le produit est très similaire pour les deux formes de produit. La seule différence réside dans la nature du vecteur qu'on considère comme étant la source et celle du vecteur qu'on considère comme étant le résultat. Pour l'opération de projection, le vecteur image constitue la source, le sinogramme est alors le résultat. C'est le contraire pour la rétroprojection.

Cette constatation est importante, car elle permet d'utiliser le même code pour une grande partie de ces deux opérations, réduisant la duplication de ce dernier et, conséquemment, le risque d'erreur.

Pour les deux types de produits, les blocs qu'on a emmagasinés sont parcourus un à un. Les coefficients qu'ils contiennent sont lus séquentiellement. Pour chaque coefficient, on garde à jour la position de l'échantillon des projections, en termes de l'indice de la projection n_p et du détecteur n_d , ainsi que la ligne n_r et la colonne n_c de l'image auxquelles il correspond.

En raison de la redondance décrite en début de chapitre, ces coordonnées permettent de retrouver les autres positions où ce coefficient se retrouverait dans une matrice complète. Ces positions sont résumées dans les tableaux 2.10 et 2.11. Les explications correspondantes se trouvent à la section 2.5.5.1.

Pour chacune des positions identifiées, la composante correspondante dans le vecteur source est lue. Le produit du coefficient et de cette composante est additionné à la position correspondante dans le résultat.

Passons maintenant au noyau de la méthode et analysons comment il est possible de retrouver la position des coefficients redondants à partir de celle d'un coefficient stocké.

2.5.5.1 Position des redondances

Ce chapitre débutait par l'étude des redondances au niveau de la matrice. Les conditions prédisant l'invariance à certaines transformations ont été énoncées.

La position d'un coefficient calculé étant connue, différentes combinaisons de ces transformations permettent de retrouver la position des autres. Ainsi, peut-on trouver, tant dans le vecteur de l'image que dans celui du sinogramme toutes les composantes lui étant reliées.

À titre d'exemple, la figure 2.5(a) illustre ce qui se produit lorsqu'on effectue une symétrie par rapport à l'axe x . Déjà, on observe que la source, d'abord à l'angle θ_s , est déplacée à l'angle $\theta'_s = -\theta_s$. Si cette projection porte l'indice n_p , on obtient celle d'indice $n'_p = N_p - n_p + 1$. Ainsi, des angles de l'intervalle $[0, \theta_{s\max}]$, on peut récupérer les angles $[-\theta_{s\max}, 0]$.

Après cette symétrie, les lignes de l'image sont également inversées, de sorte qu'un coefficient de l'image à la ligne n_r et à la colonne n_c se retrouve à $n'_r = N_r + 1 - n_r$ et $n'_c = n_c$.

Enfin, comparons ce qui se produit avec la symétrie par rapport à ce qui se produit normalement lorsque la source arrive à l'angle $-\theta_s$ (figure 2.5(b)). On constate que les configurations obtenues sont identiques, mis à part la barrette de détecteurs dont l'orientation, illustrée par une flèche, est inversée. On complète donc la transformation en inversant l'orientation de la barrette de détecteurs. L'indice n_d d'une cellule devient alors $n'_d = N_d + 1 - n_d$.

Une illustration semblable, cette fois pour une rotation d'un angle π , se trouve à la figure 2.6. Cette transformation permet de déplacer la source à l'angle $\theta'_s = \theta_s + \pi$, ce qui correspond à la projection d'indice $n'_p = \frac{N_p}{2} + n_p$. À la fois les lignes et les

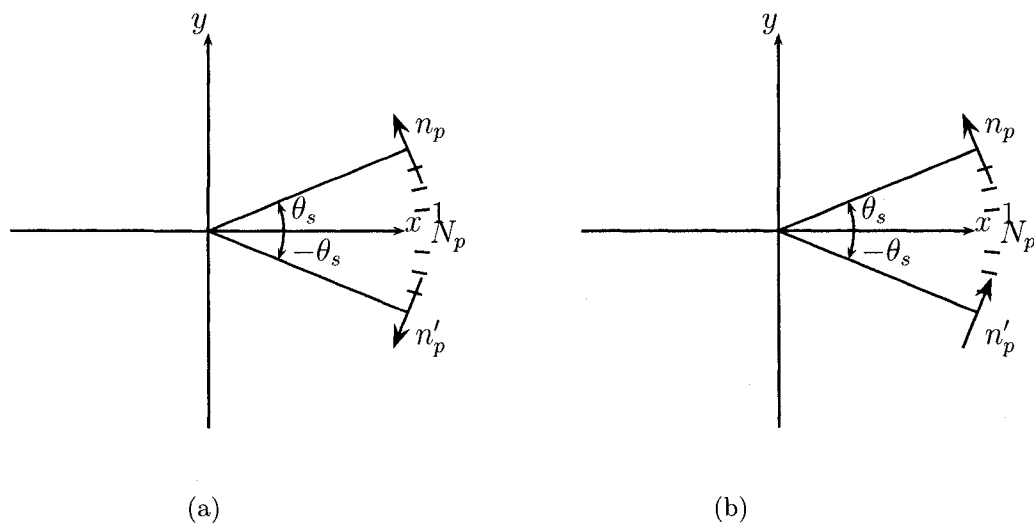


FIG. 2.5 2.5(a) : Configuration du système pour une source à θ_s et à $-\theta_s$ obtenue par symétrie par rapport à l'axe x . 2.5(b) : Configuration du système pour une source à l'angle θ_s et à $-\theta_s$ obtenue par rotation. L'orientation de la barrette de détecteurs est indiquée par une flèche.

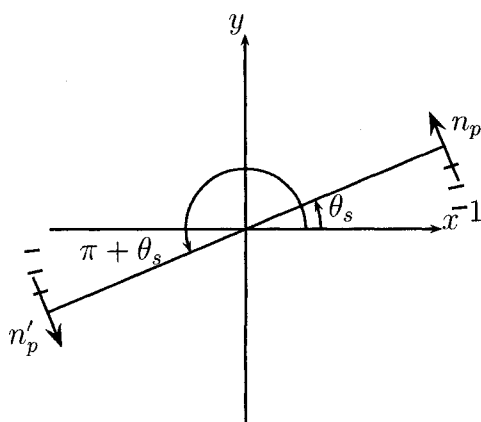


FIG. 2.6 Configuration obtenue à la suite d'une rotation d'un angle π .

TAB. 2.10 Position d'un échantillon de l'image après une transformation.

θ'_s	n'_r	n'_c	j'
θ_s	n_r	n_c	$N_r(n_c - 1) + n_r$
$-\theta_s$	$N_r + 1 - n_r$	n_c	$N_r n_c - n_r + 1$
$\pi/2 + \theta_s$	$N_c + 1 - n_c$	n_r	$N_r(n_r - 1) + N_c - n_c + 1$
$\pi/2 - \theta_s$	n_c	n_r	$N_r(n_r - 1) + n_c$
$\pi + \theta_s$	$N_r + 1 - n_r$	$N_c + 1 - n_c$	$N_r(N_c - n_c + 1) - n_r + 1$
$\pi - \theta_s$	n_r	$N_c + 1 - n_c$	$N_r(N_c - n_c) + n_r$
$-\pi/2 + \theta_s$	n_c	$N_r + 1 - n_r$	$N_r(N_r - n_r) + n_c$
$-\pi/2 - \theta_s$	$N_c + 1 - n_c$	$N_r + 1 - n_r$	$N_r(N_r - n_r) + N_c + 1 - n_c$

colonnes de l'image sont inversées, de sorte que $n'_r = N_r + 1 - n_r$ et $n'_c = N_c + 1 - n_c$. Comme l'orientation de la barrette de détecteurs n'est pas inversée, on a finalement $n'_d = n_d$.

Pour toutes les transformations, s'il existe, dans le sinogramme, une projection correspondant à l'angle de source θ'_s , alors le coefficient correspondant aux coordonnées (n'_p, n'_d, n'_r, n'_c) est redondant de celui de la position (n_p, n_d, n_r, n_c) . Lors du produit matrice-vecteur à droite, on multiplie ce coefficient par la composante de l'image aux coordonnées (n'_c, n'_r) et on en accumule le résultat à la position (n'_p, n'_d) du sinogramme.

Les tableaux 2.10 et 2.11 résument, pour un coefficient de la matrice, quelles composantes de l'image et du sinogramme doivent être sélectionnées pour obtenir la projection à l'angle θ'_s à partir de celle qui se trouve à l'angle θ_s .

TAB. 2.11 Position d'un échantillon dans les projections après une transformation.

θ'_s	n'_p	n'_d	i'
θ_s	n_p	n_d	$N_d(n_p - 1) + n_d$
$-\theta_s$	$N_p + 2 - n_p$	$N_d + 1 - n_d$	$N_d(N_p + 2 - n_p) + 1 - n_d$
$\pi/2 + \theta_s$	$N_p/4 + n_p$	n_d	$N_d(N_p/4 + n_p - 1) + n_d$
$\pi/2 - \theta_s$	$N_p/4 + 2 - n_p$	$N_d + 1 - n_d$	$N_d(N_p/4 + 2 - n_p) + 1 - n_p$
$\pi + \theta_s$	$N_p/2 + n_p$	n_d	$N_d(N_d/2 + n_p - 1) + n_d$
$\pi - \theta_s$	$N_p/2 + 2 - n_p$	$N_d + 1 - n_d$	$N_d(N_p/2 + 2 - n_p) + 1 - n_d$
$-\pi/2 + \theta_s$	$3N_p/4 + n_p$	n_d	$N_d(3N_p/4 + n_p - 1) + n_d$
$-\pi/2 - \theta_s$	$3N_p/4 + 2 - n_p$	$N_d + 1 - n_d$	$N_d(3N_p/4 + 2 - n_p) + 1 - n_d$

2.5.5.2 Angles particuliers

Une particularité importante doit être mentionnée à propos de la façon dont on calcule le résultat. On mentionne depuis le début que ce dernier est accumulé dans le vecteur approprié. Une attention particulière doit être portée à certains angles de projection pour éviter leur duplication.

Le problème potentiel survient au niveau de la symétrie. Cette dernière permet de calculer les projections pour $\theta'_s \in [-\theta_{s\max}, 0]$ à partir des angles $\theta_s \in [0, \theta_{s\max}]$. Si on ne porte pas attention, les coefficients pour l'angle $\theta_s = 0$ seront utilisés également pour la projection pour $-\theta_s = 0$. Ainsi, la contribution de ces coefficients sera doublée, ce qui ne doit pas être. Il en va de même dans le cas où toutes les transformations sont utilisées et que $\theta_{s\max} = \pi/4$.

2.5.6 Sauvegarde et chargement

Le temps de calcul des coefficients de la matrice s'avère long dans la plupart des cas. Comme la diversité des paramètres géométriques est faible, c'est-à-dire que le plus grand nombre des reconstructions est effectué avec un faible nombre de matrices de projection différentes, un gain de temps significatif peut être obtenu en conservant ces matrices et en les rechargeant plutôt qu'en les recréant chaque fois.

La structure de stockage est suffisamment simple pour que la matrice soit stockée de manière séquentielle. Les structures de contrôle de la matrice sont tout d'abord inscrites. Par la suite, on enchaîne avec les blocs un à un en débutant également par les structures de contrôle, ce qui permet de retrouver les données aisément lors de la lecture.

Pour la lecture, on commence par lire les structures de contrôle au début du fichier, ce qui permet de connaître le nombre de blocs contenus dans la matrice. Par la suite, l'information de contrôle de chacun des blocs permet de connaître la longueur du vecteur de données à lire. Il ne reste qu'à lire les données et à enchaîner avec le bloc suivant.

2.6 Variations par rapport à la géométrie de base

Comme on l'a déjà mentionné, la méthode doit tenir compte des paramètres géométriques des appareils SOMATOM Sensation 16 et 64 de Siemens. Ces derniers tirent profit de méthodes particulières pour améliorer l'échantillonnage des projections. Ces particularités touchent la position de la source et des détecteurs, ce que nous verrons dans les prochaines sections. Une fois ces variations exposées, nous expliquerons, à la section 2.7, leurs conséquences sur la matrice de projection.

2.6.1 Décalage du détecteur

La première stratégie consiste à appliquer un léger décalage du détecteur, ce qui permet d'améliorer l'échantillonnage de l'objet (Kalender, 2005). En effectuant un décalage, que nous représenterons par $\Delta\theta_d$, du quart de la largeur d'une cellule de détection, en le faisant pivoter autour du point focal de la source, on arrive à doubler la densité de l'échantillonnage à l'isocentre.

La comparaison entre les rayons non décalés et décalés, pour deux projections diamétralement opposées, est illustrée aux figures 2.7(a) et 2.7(b) respectivement. On observe que les points d'intersection avec l'axe horizontal sont intercalés avec le décalage.

Les rayons sur lesquels sont échantillonnées les projections sans et avec décalage d'un quart de détecteur sont illustrés à la figure 2.8(a) et 2.8(b) respectivement. Ces dernières figures correspondent à 15 projections en éventail, composées de 20 échantillons, chacun espacé d'un angle $\pi/30$. La région représentée fait 500 mm de côté. La source est située à 570 mm de l'isocentre et le détecteur à 470 mm.

Si on se replace dans le cadre didactique de la tomographie à rayons parallèles, le fait d'intercaler les rayons vient directement doubler la densité radiale des échantillons et ainsi doubler la fréquence de Nyquist dans le même sens. Le décalage vient ainsi augmenter la fréquence maximale des objets qu'il est possible de reconstruire. L'effet est le même pour une géométrie en éventail, ce qu'on observe près de l'isocentre lorsqu'on compare les figures 2.8(a) et 2.8(b).

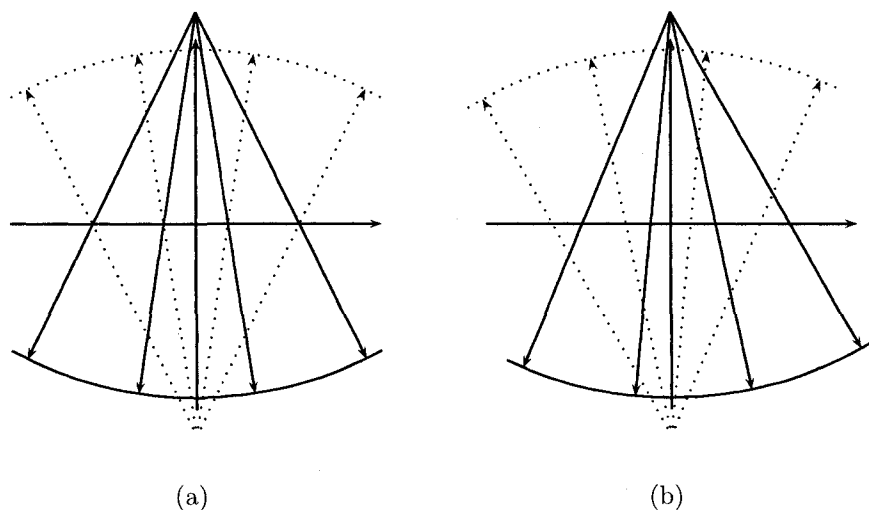


FIG. 2.7 Projections opposées sans décalage du détecteur 2.7(a) et avec décalage 2.7(b).

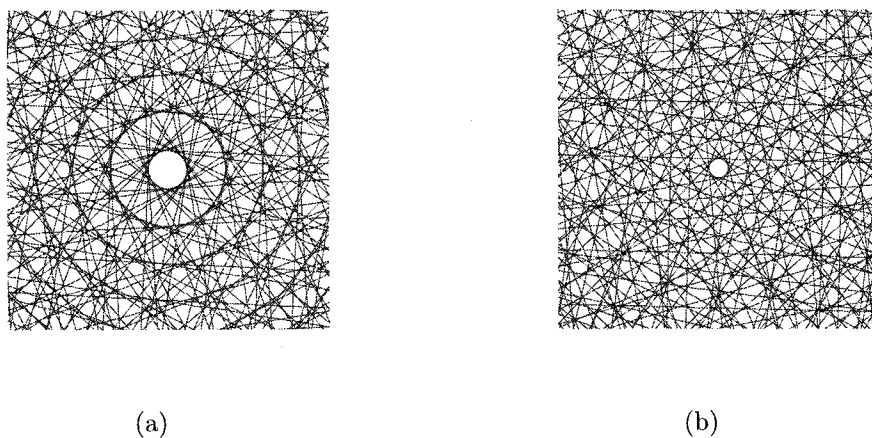


FIG. 2.8 Ensemble des rayons (minces) pour une géométrie en éventail avec 15 projections et 20 détecteurs sans décalage 2.8(a) et avec décalage 2.8(b). Les rayons sont espacés d'un angle $\pi/30$. La région représentée est un carré de 500 mm de côté. La source et la barrette de détecteurs sont respectivement à une distance de 570 mm et 470 mm de l'isocentre.

2.6.2 Source volante

La méthode traditionnelle voudrait qu'on augmente la résolution des mesures en augmentant le nombre de cellules de détection par unité de surface. La méthode proposée par Siemens (Kachelriess et al., 2004; Kachelriess et al., 2006), consiste à faire varier de manière périodique la position de la source et permet, dans certaines conditions, de doubler la résolution azimutale (dans le sens de la barrette de détecteurs) et longitudinale (selon z) des mesures.

L'idée qui sous-tend la technique de « source volante » est de créer, à partir d'un seul tube radiogène, plusieurs points de source virtuels. Lorsqu'un faisceau d'électrons de haute énergie frappe une plaque métallique, un certain nombre de ces électrons sont réémis sous forme de rayons X. En faisant dévier le faisceau d'électrons pour changer son point d'impact sur la plaque, on déplace du même coup la source de rayons X. Ces mécanismes seront décrits aux sections 2.6.2.1 et 2.6.2.2.

Le modèle SOMATOM Sensation 64 de Siemens est le premier à proposer une déflexion du faisceau dans deux directions. La figure 2.9 illustre le principe de la déviation du faisceau et la position des points de source résultant de cette déviation pour le tube Straton présent dans l'appareil considéré.

Sur la figure 2.9(a) est représentée une vue de profil du tube. Le faisceau est dévié d'une distance $\pm\Delta R_F$ selon l'axe r du référentiel tournant. L'angulation du tube permet d'en obtenir une déviation longitudinale $\pm\Delta z$. La figure 2.9(b) illustre le système vu de face montrant les deux points de source obtenus d'une déviation latérale de $\pm R_F\Delta\alpha$.

Les expressions liant l'amplitude des déviations et la résolution dans les deux sens s'expriment en termes de

- R_F , la distance du tube radiogène à l'isocentre;

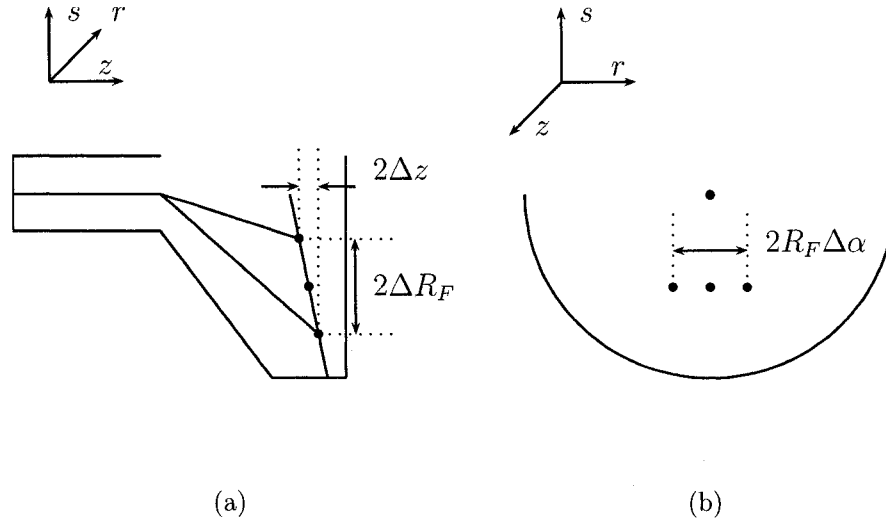


FIG. 2.9 Illustration du tube Straton de Siemens. Vue de profil 2.9(a) et vue de face 2.9(b).

- R_D , la distance entre le centre de la matrice de détecteurs et l'isocentre ;
- R_{FD} , la somme de ces deux distances ;
- S , l'épaisseur de la tranche évaluée à l'isocentre.

Contrairement à la déflexion angulaire, les deux points focaux obtenus avec la déflexion longitudinale ne sont pas dans le même plan image. Ainsi, seule la déflexion angulaire entre dans notre cadre de travail bidimensionnel. Les deux types de déflexion sont toutefois très semblables. Il est alors pertinent de voir aussi la déflexion longitudinale, d'autant plus qu'il faudra en tenir compte dans un avenir rapproché.

2.6.2.1 Source volante angulaire

La déflexion angulaire de la source permet de doubler la résolution azimutale, c'est-à-dire dans le sens de l'éventail, à l'isocentre. La figure 2.10(a) illustre les deux éventails entrelacés produits à la suite d'un déplacement du point focal d'un

angle $\Delta\alpha$ de part et d'autre du centre. Ainsi, pour chaque position angulaire du tube radiogène, deux séries de mesures sont effectuées.

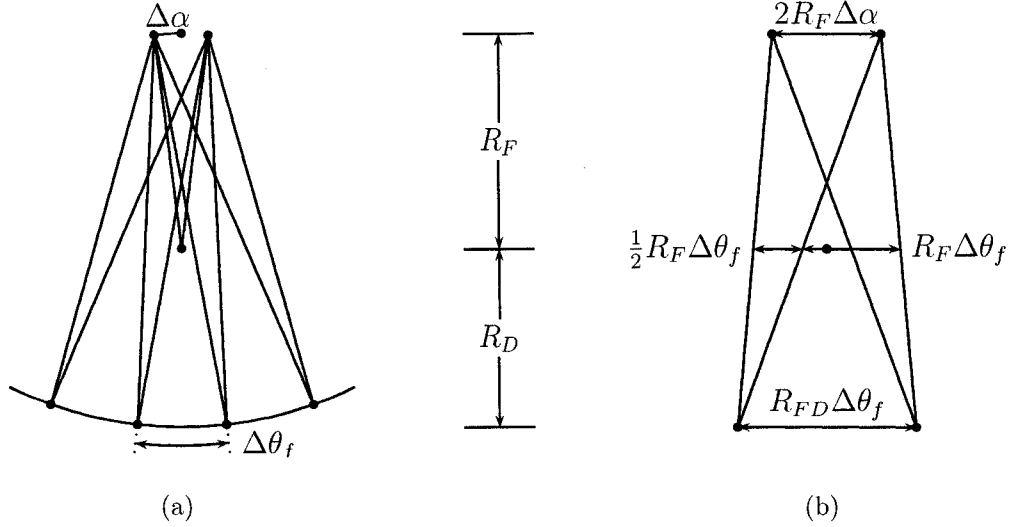


FIG. 2.10 Géométrie de l'éventail pour une source volante angulaire 2.10(a). Rayons de part et d'autre de l'isocentre en considérant une approximation de petits angles pour le calcul de l'angle de la déviation 2.10(b).

Sur la figure 2.10(b), seuls les rayons les plus près de l'isocentre ont été conservés. Ces derniers permettent d'effectuer le calcul de la résolution azimutale en fonction de la distance $2R_F\Delta\alpha$ entre les deux points focaux ainsi que celui de l'angle $\Delta\alpha$ duquel il faut faire dévier la source pour obtenir un doublement de cette résolution.

Le calcul de l'angle de déviation idéal se base fortement sur l'hypothèse que les angles entre deux détecteurs et entre les deux points de source sont petits. La longueur du segment de droite (approximativement confondu avec l'arc de cercle) reliant le centre des deux détecteurs considérés, ramenée à l'isocentre, est inversement proportionnelle à la résolution azimutale. Lorsqu'on considère plutôt la distance entre les deux points de source et qu'on la ramène à l'isocentre, on obtient une mesure reliée à la nouvelle résolution azimutale. Cette dernière est doublée

lorsque (Kachelriess et al., 2004)

$$\Delta\alpha \approx \frac{1}{4} \frac{R_{FD}}{R_D} \Delta\theta_f.$$

2.6.2.2 Source volante longitudinale

L'appareil SOMATOM Sensation 64 récemment introduit propose, en plus du déplacement angulaire du point focal, un déplacement Δz en direction longitudinale. Ce déplacement intervient dans les séquences hélicoïdales (Flohr et al., 2005) et a pour effet de faire changer le plan dans lequel se trouve la source.

On obtient une telle déviation du point focal de la source en faisant varier en direction radiale le point d'impact du faisceau d'électrons sur la plaque angulée. Les éventails ainsi produits sont illustrés sur la figure 2.11(a).

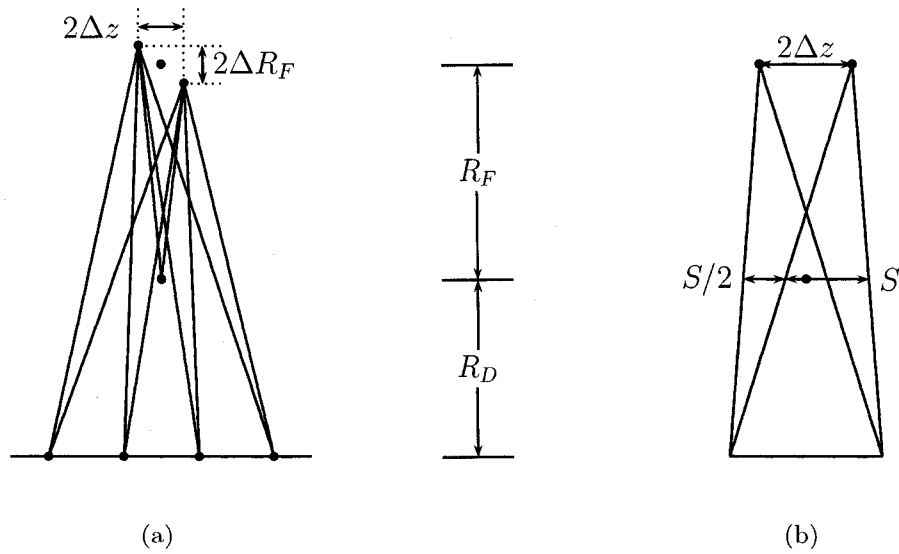


FIG. 2.11 Géométrie de l'éventail pour une source volante longitudinale 2.10(a). Rayons de part et d'autre de l'isocentre en considérant une approximation de petits angles pour le calcul de la longueur de la déviation du point focal 2.10(b).

Un raisonnement semblable à celui de la section précédente permet de déterminer la distance entre les deux points focaux, ce qui a pour effet de réduire d'un facteur 2 l'épaisseur de tranche S à l'isocentre. On note que l'angulation du tube fait en sorte qu'un des deux points est plus éloigné de l'isocentre que l'autre. Cet aspect est négligeable en pratique pour le calcul de la distance Δz . Il faut cependant en tenir compte lorsqu'on modélise la projection puisque l'approximation des petits angles n'est plus satisfaite pour les barrettes éloignées de l'isocentre. Pour doubler la résolution longitudinale, il faut que la distance $2\Delta z$ entre les deux points focaux, une fois rapportée à l'isocentre, soit la moitié de l'épaisseur de tranche initiale. Cela se traduit mathématiquement par une déviation (Kachelriess et al., 2004)

$$\Delta z \approx \frac{1}{4} S \frac{R_{FD}}{R_D}.$$

Insistons sur le fait que ce déplacement longitudinal a pour effet secondaire un déplacement considérable de la source dans la direction radiale. Ainsi, la distance entre la source et l'isocentre n'est plus constante. Il faudra en tenir compte dans le modèle. Le lien entre les déplacements longitudinal et radial de la source s'exprime comme

$$\tan \phi = \frac{\Delta z}{\Delta R_F}$$

où ϕ est l'angle de la plaque tel qu'illustré sur la figure 2.11(a). La plaque du tube Straton est inclinée d'un angle $\phi = 7$ degrés.

2.7 Méthode mise en œuvre avec décalage et source volante

Le décalage du détecteur et la source volante amènent un certain nombre de changements à la géométrie du système se traduisant par de nécessaires modifications à la mise en œuvre de la matrice de projection. Ces changements touchent la forme des éventails ainsi que la disposition des données à l'intérieur du sinogramme, et

se répercutent au niveau de la génération de la matrice et de son produit avec des vecteurs. Nous verrons, dans les deux sections à venir, les modifications nécessaires pour tenir compte de ces deux particularités. La méthode pour paramétrer les rayons sera également revue, le niveau de complexité étant légèrement augmenté à ce niveau. Enfin, on rediscutera des conditions permettant d'identifier par rapport à quelles transformations la matrice est invariante.

2.7.1 Décalage du détecteur

Les projections échantillonnées avec une barrette de détecteurs ayant subi un décalage ne forment plus un éventail symétrique. La matrice n'est alors plus invariante par symétrie. Dans le meilleur cas, la matrice est invariante par des rotations d'angles multiples de $\pi/2$. Il est alors nécessaire de conserver les coefficients de deux fois plus de projections que pour une matrice « sans décalage du détecteur ».

La prise en compte du décalage du détecteur modifie très peu le modèle vu à la section 2.5.4.3 et reste simple à mettre en œuvre.

Le calcul des coefficients d'une ligne de la matrice est fait, rappelons le, à partir de l'angle du rayon correspondant et de sa distance par rapport à l'isocentre. Ainsi, il suffit d'ajouter l'angle du décalage à l'angle de tous les rayons de l'éventail :

$$\theta'_f = \theta_f + \Delta\theta_d.$$

La distance entre le rayon et l'isocentre est calculée comme auparavant en considérant l'angle décalé :

$$r' = R_F \sin \theta'_f.$$

2.7.2 Source volante

La source volante longitudinale sortant du cadre bidimensionnel, elle ne fait pas partie des fonctionnalités de la matrice de projection à l'heure actuelle.

Avant de discuter du développement d'une matrice de projection avec source volante, il est utile de clarifier la signification du terme « position de la source » ou « position du point focal » en relation avec ce qu'on appellera « position du tube ». Ce à quoi on continuera de faire référence en tant que position de la source ou du point focal constitue le point d'où sont émis les rayons X. Cette position, identique à celle du tube radiogène dans un contexte sans source volante, s'en différencie du fait que le faisceau d'électrons ne frappe plus le centre du tube. Ainsi, la position du tube fait référence à la position du centre du tube radiogène et est caractérisée par θ_s et R_F .

2.7.2.1 Redondance des projections avec source volante

Dans un contexte où on emploie la source volante, pour chaque position du tube radiogène, on effectue N_{fs} acquisitions auxquelles on fait référence par l'indice n_{fs} . Ce nombre correspond au nombre de points focaux. On pose l'hypothèse que ces points de source sont positionnés symétriquement autour de la position du tube. Si on considère l'ensemble des acquisitions faites pour une position du tube comme formant une seule et même projection, cette dernière est alors symétrique lorsque le décalage du détecteur n'est pas effectué. Les règles permettant d'identifier les transformations vis-à-vis desquelles la matrice est invariante s'appliquent maintenant à ces ensembles d'acquisitions.

Pour qu'une rotation d'un angle π du système permette d'obtenir une autre série

de données du sinogramme, il est nécessaire de disposer d'un nombre pair de ces ensembles. Lorsque deux points de source sont utilisés, le nombre d'acquisitions doit alors être un multiple de quatre. Le même raisonnement montre que, pour une rotation d'un angle $\pi/2$, le nombre d'acquisitions doit être un multiple de huit.

On constate que la proportion de coefficients redondants ne se trouve pas altérée. La seule différence est que le nombre de données augmente d'un facteur N_{fs} ; la taille de la matrice à emmagasiner augmente alors de la même façon.

2.7.2.2 Paramétrisation des rayons

Le décalage de la source produit par une source volante angulaire résulte en des rayons qui ne sont plus espacés de façon équiangulaire. Cela vient complexifier quelque peu le calcul des paramètres de ces derniers. Il est, en effet, nécessaire de calculer explicitement la position de la source et celle de chaque détecteur. L'angle de la droite interpolant ces deux points ainsi que sa distance par rapport à l'isocentre sont ensuite calculés.

Nous allons, pour effectuer les développements correspondants, nous placer dans un référentiel immobile du point de vue de l'éventail. La figure 2.12 illustre le calcul pour un rayon dans ce référentiel.

Le tube est positionné à l'angle zéro à une distance R_F de l'isocentre. La position d'un point focal étant tributaire d'un décalage d'un angle $\Delta\alpha$, on a

$$x_s = R_F \cos(\Delta\alpha)$$

$$y_s = R_F \sin(\Delta\alpha).$$

Si on tient compte du décalage du détecteur décrit à la section précédente, le centre

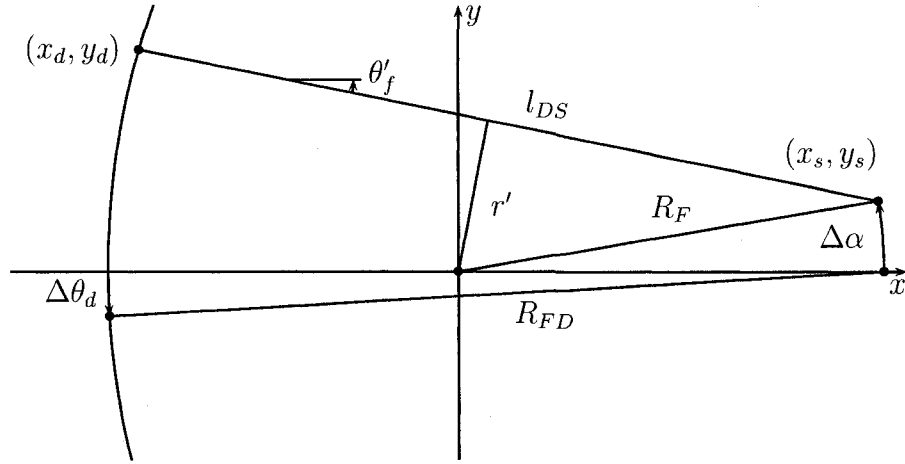


FIG. 2.12 Illustration du calcul de l'angle et de la distance entre le rayon et l'iso-centre.

d'une cellule du détecteur est alors à la position

$$x_d = R_F - R_{FD} \cos(\theta_f + \Delta\theta_d)$$

$$y_d = -R_{FD} \sin(\theta_f + \Delta\theta_d).$$

Connaissant la position du détecteur et de la source, on détermine maintenant l'angle du rayon et sa distance par rapport à l'origine. Ces paramètres s'expriment en termes des quantités intermédiaires suivantes :

$$l_{DS} = \sqrt{(x_s - x_d)^2 + (y_s - y_d)^2},$$

$$\cos(\theta'_f) = (x_s - x_d)/l_{DS},$$

$$\sin(\theta'_f) = (y_s - y_d)/l_{DS},$$

$$\tan(\theta'_f) = \frac{y_s - y_d}{x_s - x_d}.$$

L'angle du rayon est alors obtenu en prenant l'arctangente de la dernière expression :

$$\theta'_f = \arctan \left(\frac{y_s - y_d}{x_s - x_d} \right).$$

Pour ce qui est de sa distance à l'isocentre, rappelons le modèle utilisé pour un rayon d'angle θ'_f et de distance r' :

$$x \sin(\theta'_f) - y \cos(\theta'_f) + r' = 0.$$

On a alors

$$r' = y \cos(\theta'_f) - x \sin(\theta'_f)$$

et

$$r' = \frac{y(x_s - x_d) - x(y_s - y_d)}{l_{DS}}.$$

Même si on évalue cette expression en prenant $(x, y) = (x_s, y_s)$ ou $(x, y) = (x_d, y_d)$, l'expression obtenue est identique :

$$r = \frac{x_s y_d - x_d y_s}{l_{DS}}.$$

2.7.2.3 Produits matriciels

L'ajout de la source volante se répercute également au niveau du produit matriciel. Le sinogramme est maintenant constitué de N_p projections, chacune étant l'ensemble des N_{fs} acquisitions pour une même position du tube, elles mêmes constituées de N_d échantillons.

L'indexation du vecteur sinogramme doit tenir compte de cette caractéristique. De ce fait, l'indice de la donnée correspondant à la projection n_p , au point de source n_{fs} et au détecteur n_d s'exprime maintenant comme

$$i = N_d N_{fs} (n_p - 1) + N_d (n_{fs} - 1) + n_d.$$

Le tableau 2.12 résume la position des coefficients redondants de la matrice en fonction des diverses transformations, cette fois, en tenant compte de la source volante.

TAB. 2.12 Position d'un échantillon dans les projections après une transformation en tenant compte de la source volante.

θ'_s	n'_p	n'_{fs}	n'_d
θ_s	n_p	n_{fs}	n_d
$-\theta_s$	$N_p + 2 - n_p$	$N_{fs} + 1 - n_{fs}$	$N_d + 1 - n_d$
$\pi/2 + \theta_s$	$N_p/4 + n_p$	n_{fs}	n_d
$\pi/2 - \theta_s$	$N_p/4 + 2 - n_p$	$N_{fs} + 1 - n_{fs}$	$N_d + 1 - n_d$
$\pi + \theta_s$	$N_p/2 + n_p$	n_{fs}	n_d
$\pi - \theta_s$	$N_p/2 + 2 - n_p$	$N_{fs} + 1 - n_{fs}$	$N_d + 1 - n_d$
$-\pi/2 + \theta_s$	$3N_p/4 + n_p$	n_{fs}	n_d
$-\pi/2 - \theta_s$	$3N_p/4 + 2 - n_p$	$N_{fs} + 1 - n_{fs}$	$N_d + 1 - n_d$

2.8 Conclusion

Nous avons développé une méthode pour effectuer efficacement les opérations de projection et rétroprojection. Malgré la quantité de mémoire nécessaire, la méthode retenue prend la forme du stockage explicite d'une matrice.

Par l'analyse de la structure de cette matrice, nous sommes arrivés à identifier un certain nombre de redondances et à formuler une série de transformations permettant de ne conserver, dans le meilleur des cas, qu'un huitième de ses lignes.

Lorsqu'un décalage du détecteur est effectué, cette réduction est plutôt un facteur 4, les projections n'étant plus symétriques. L'utilisation d'une source volante angulaire ne vient pas réduire davantage le niveau de redondance, mais nécessite d'emmagasiner deux fois plus de lignes.

Lorsqu'en plus, on tient compte de la structure individuelle de chaque ligne de la matrice, on réussit à emmagasiner chacune d'elles en utilisant significativement moins d'espace mémoire qu'avec les méthodes générales. Deux méthodes sont comparables à ce titre, l'une à longueur de segments fixe, l'autre à longueur de segments variable. Ces deux méthodes sont comparées empiriquement à la section 4.1.

De ces résultats, on note que le stockage des blocs par la méthode à segments de taille variable s'est avérée un peu moins lourde en mémoire et plus performante en ce qui concerne les produits matrice-vecteur.

CHAPITRE 3

PRÉCONDITIONNEMENT

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons des méthodes développées dans le but d'atteindre la deuxième partie du deuxième objectif de nos travaux, c'est-à-dire d'obtenir une accélération des méthodes itératives de reconstruction par le biais d'une méthode de préconditionnement adaptée à notre problème.

La méthode consiste à appliquer un changement de variable au problème afin d'obtenir un nouveau problème plus facile à résoudre.

L'utilisation d'une méthode de préconditionnement entraîne, du point de vue des méthodes itératives, une accélération de la convergence en fonction du nombre d'itérations. Cela est toutefois réalisé au prix d'une augmentation du temps de calcul de chaque itération puisqu'un système linéaire doit être résolu chaque fois.

Le principal défi à relever dans la conception d'un préconditionneur est alors d'établir un compromis entre l'accélération de la convergence, en termes du nombre d'itérations, et l'augmentation du temps de calcul pour chaque itération. On souhaite, au final, qu'une accélération de la convergence soit observée en fonction du temps.

À cet effet, nous commencerons par expliquer ce qu'est le conditionnement d'un problème et comment on l'exprime numériquement.

Nous explorerons ensuite les différentes formes que peut prendre le précondition-

nement, en observant le problème sous l'angle de la minimisation d'une forme quadratique et sous l'angle de l'annulation de son gradient. Nous verrons que la méthode peut également être appliquée à des fonctions non quadratiques.

Nous énoncerons quelques propriétés de notre problème de reconstruction importantes pour le préconditionnement.

Nous discuterons brièvement de quelques méthodes usuelles de préconditionnement qui pourraient être appliquées considérant la structure du problème. Nous verrons pourquoi nous avons privilégié la conception d'un préconditionneur basé sur une approximation circulante du hessien du critère.

Une fois les propriétés des matrices circulantes expliquées, nous verrons comment nous avons approximé le hessien du problème discret de tomographie à rayons X par une telle matrice.

De plus, une méthode proposée par Fessler & Booth (1999) a permis d'obtenir des résultats intéressants en tomographie d'émission monophotonique (SPECT). La reconstruction d'images pour cette modalité est suffisamment similaire à la reconstruction d'image en tomographie à rayons X pour qu'on s'y intéresse. Nous revisiterons leur méthode en l'adaptant à notre problème de reconstruction.

3.2 Conditionnement

Le conditionnement d'un système linéaire

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

avec $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ non singulière, est indicateur de la difficulté qu'on aura à le résoudre numériquement. Ce concept, comme on le verra, est étroitement lié à la

distribution des valeurs propres de la matrice \mathbf{H} .

Une mesure du conditionnement est le nombre de conditionnement défini comme suit :

Considérons la norme matricielle induite par une norme vectorielle

$$\|\mathbf{H}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{H}\mathbf{x}\|.$$

Le nombre de conditionnement de la matrice \mathbf{H} selon cette norme est défini comme

$$\mathcal{K}(\mathbf{H}) = \|\mathbf{H}\| \|\mathbf{H}^{-1}\|.$$

On note que pour un système symétrique défini positif, tel notre critère des moindres carrés non régularisés ou régularisés par une fonction quadratique, le nombre de conditionnement selon la norme euclidienne s'exprime de la manière suivante :

$$\mathcal{K}_2(\mathbf{H}) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

où λ_{\max} et λ_{\min} sont respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs propres de la matrice \mathbf{H} .

Dans tous les cas, on a $\mathcal{K} \geq 1$. La matrice identité est de norme égale à 1, peu importe la norme choisie, alors son nombre de conditionnement est égal à 1. Pour une matrice orthonormale, le nombre de conditionnement selon la norme euclidienne est aussi égal à 1. À l'opposé, le nombre de conditionnement d'une matrice singulière est infini. Toutes les matrices carrées se situent quelque part entre ces deux extrêmes.

Le nombre de conditionnement indique donc, en quelque sorte, à quel point une matrice est loin de l'identité ou, de manière équivalente, à quel point elle est près d'être singulière. Quand ce nombre est élevé, on parle alors de mauvais conditionnement ou de problème mal conditionné.

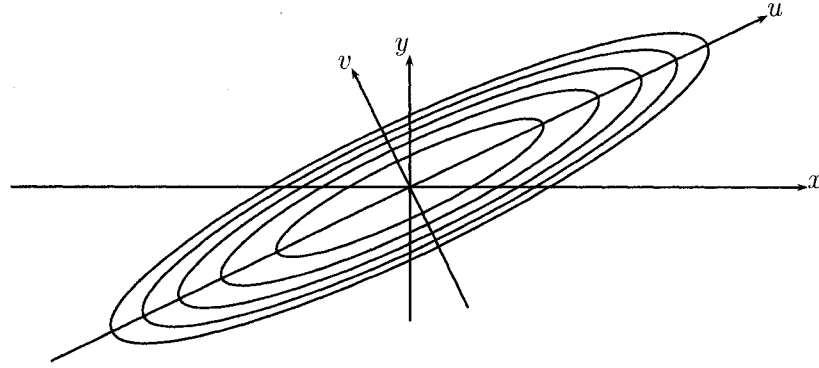


FIG. 3.1 Illustration du concept de conditionnement pour une forme quadratique sur un domaine bidimensionnel.

Le lien entre le nombre de conditionnement et la difficulté numérique du système s'exprime comme suit :

$$\frac{\|\mathbf{e}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{e}(\mathbf{x}_0)\|} \leq \mathcal{K}(\mathbf{H}) \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{r}(\mathbf{x}_0)\|}$$

où $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}$ est le résidu du système et $\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ est l'erreur d'estimation en \mathbf{x} .

Ainsi, même si le résidu en \mathbf{x} est faible, l'erreur d'estimation peut être très grande lorsque le système est très mal conditionné. Puisque la précision machine n'est pas infinie, le conditionnement indique également à quel point on peut espérer obtenir une solution précise.

La figure 3.1 permet d'interpréter ce concept sous l'angle de la minimisation d'une forme quadratique. Nous y montrons les courbes de niveau pour une forme quadratique sur un domaine bidimensionnel. La valeur propre correspondant au vecteur propre u est plus grande que celle qui correspond au vecteur propre v . On constate que si on se trouve près de l'axe u , même si la norme du résidu (gradient) est faible, on se trouve potentiellement loin du minimum. Plus le nombre de conditionnement augmente, plus les ellipses sont étirées et plus ce phénomène prend de l'ampleur.

Le concept de conditionnement s'applique aussi à des problèmes de minimisation de fonctions non quadratiques. Dans ce cas, on se reporte aux propriétés de leur hessien.

3.3 Différentes formes de préconditionnement

Le préconditionnement peut être effectué en examinant le problème selon deux angles différents.

Le premier consiste à appliquer un changement de variable à l'expression de la forme quadratique à minimiser, ce qu'on a vu à la section 1.2.3.4 et qui a permis de parvenir à la formulation de l'algorithme du gradient conjugué préconditionné.

Le deuxième consiste plutôt à voir le problème de minimisation sous l'angle de l'annulation du gradient de la fonction, ou de la résolution du système linéaire d'équations correspondant. Le problème d'optimisation vu sous cet angle permet de constater que le préconditionnement peut prendre plusieurs formes.

Considérant le système original $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ à résoudre, on peut transformer le problème de trois manières, ce qui donne trois nouveaux problèmes :

1. Résoudre $\mathbf{M}^{-T}\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-T}\mathbf{y}$ pour \mathbf{x} .
2. Résoudre $\mathbf{H}\mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y}$ pour $\tilde{\mathbf{x}}$ et $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\mathbf{x}$ pour \mathbf{x} .
3. Résoudre $\mathbf{M}_1^{-T}\mathbf{H}\mathbf{M}_2^{-1}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}_1^{-T}\mathbf{y}$ pour $\tilde{\mathbf{x}}$ et $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{M}_2\mathbf{x}$ pour \mathbf{x} .

Le premier problème est dit préconditionné à gauche, et le deuxième préconditionné à droite. Le troisième l'est des deux côtés.

L'objectif, dans tous les cas, est d'obtenir un système mieux conditionné, c'est-à-dire plus près de l'identité. Cela s'exprime, pour les deux premiers cas, par la recherche d'un préconditionneur \mathbf{M}^{-1} tel que $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H} \approx \mathbf{I}$.

On peut montrer que lorsque $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1$, le troisième système est symétrique et défini positif. La forme quadratique correspondante est celle qu'on obtient en effectuant le changement de variable dans l'expression de la forme quadratique originale.

On peut également montrer que la recherche d'un préconditionneur $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1$ tel que $\mathbf{M}_1^{-T} \mathbf{H} \mathbf{M}_1^{-1} \approx \mathbf{I}$ est équivalente à la recherche d'un préconditionneur \mathbf{M}_1^{-1} tel que

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{H} \equiv \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{M}_1^{-T} \mathbf{H} \approx \mathbf{I}.$$

On cherche alors à approximer la racine carrée de \mathbf{H} .

Deux approches au préconditionnement sont envisageables, soit une approche dite directe, pour laquelle on cherche une approximation \mathbf{M} de \mathbf{H} facilement inversible, et une approche dite inverse où on cherche plutôt à obtenir directement une approximation \mathbf{M}^{-1} de son inverse.

Plus de détails concernant chacune des formes de préconditionnement ainsi que l'explication de plusieurs méthodes peuvent être obtenus dans Chen (2005).

Ces trois formes de préconditionnement, appliquées à la résolution d'un système linéaire d'équations ou à l'annulation du gradient d'une fonction s'appliquent de la même façon à la minimisation d'une fonction. Dans ce cas, les mêmes transformations sont appliquées au hessien de la fonction.

3.4 Propriétés de notre problème concernant le préconditionnement

Le hessien de notre critère s'exprime comme suit :

$$\nabla^2 C(\mu) = \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \nabla^2 R(\mu).$$

Il est composé de deux termes, soit le terme $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, correspondant à l'adéquation aux données, et le terme correspondant à la régularisation :

$$\nabla^2 R(\mu) = \sum_{m=0}^M w_m^2 (\mathbf{D}^{(m)})^T \text{diag} \left\{ \psi'' \left(w_m [\mathbf{D}^{(m)} \mu]_j \right) \right\} \mathbf{D}^{(m)},$$

avec

$$\psi''(t) = \frac{\delta^2}{(t^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ces deux termes ont des propriétés différentes que nous exposons ici ainsi que celles du hessien complet, de manière à bien cerner les implications associées au préconditionnement de notre méthode de reconstruction.

Le premier terme correspond à la rétroprojection des projections. Chacune de ses colonnes représente la réponse impulsionnelle pour un échantillon de l'image sur un échantillon de l'image obtenue en rétroprojetant les projections.

Dans le cadre discret dans lequel nous évoluons, la réponse impulsionnelle est tronquée aux frontières de l'image. De plus, la discrétisation perçue d'un rayon à l'autre est différente. Ces deux aspects rendent la réponse impulsionnelle discrétisée variante d'un échantillon à l'autre de l'image. Enfin, la réponse impulsionnelle étant infinie et strictement positive, la matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ est structuralement dense.

Par construction, $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ est symétrique et semi-définie positive. Dans la mesure où un nombre suffisant de mesures sont acquises, ce qui est le cas pour la configuration du tomographe, elle est également définie positive.

La figure 3.2 illustre le premier terme du hessien correspondant à une image de taille 16×16 pour laquelle les données sont acquises avec les paramètres géométriques du tomographe (voir annexe I) sans source volante ni décalage. Leur prise en compte ne change, à toute fin pratique, rien à la structure de la matrice.

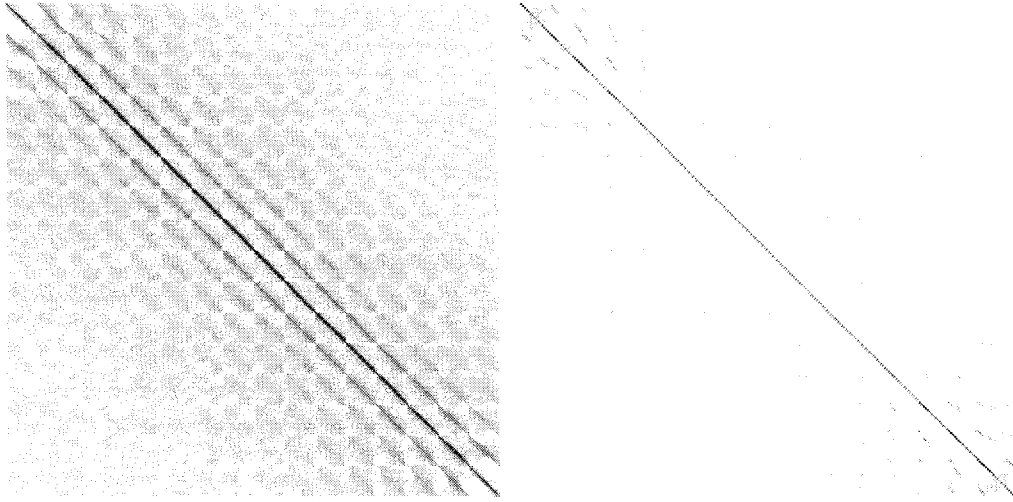


FIG. 3.2 Illustration de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ et de son inverse pour une image de taille 16×16 .

On y observe que la matrice est dense. On observe également la dominance de la diagonale pour son inverse.

Le hessien du terme de régularisation est composé de cinq termes dont la signification a été expliquée à la section 1.1.5.3. Ainsi, chaque matrice $\mathbf{D}^{(m)}$, avec $m = 1, 2, 3, 4$, est formée de deux diagonales dont la principale. Les produits $(\mathbf{D}^{(m)})^T \mathbf{D}^{(m)}$ sont alors formés de trois diagonales et sont symétriques et semi-définis positifs. Seule la matrice $(\mathbf{D}^{(0)})^T \mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{I}$ est définie positive, les autres n'étant pas inversibles.

La fonction de régularisation change peu de chose à la structure du hessien et à son inverse. La pénalisation du module de la solution ($m = 0$) nous assure qu'il est, dans tous les cas, défini positif.

Le principal obstacle limitant les possibilités de préconditionnement est la taille du hessien. Ce dernier ainsi que son inverse sont denses et sont constitués, pour une image de 512×512 échantillons, de $6,8719 \times 10^{10}$ coefficients.

Il faut également garder à l'esprit qu'un des objectifs à moyen terme est d'effectuer des reconstructions tridimensionnelles, pour lesquelles le hessien est de taille beaucoup plus élevée.

On remarque également que l'utilisation d'une fonction non quadratique fait en sorte que le hessien varie en fonction du point courant, ce dont il faut tenir compte.

Le choix d'une méthode doit alors être basé soit sur le caractère creux de la matrice de projection, ou sur la possibilité de ne pas représenter complètement le hessien.

Afin de préserver le caractère symétrique défini positif, il est nécessaire de développer une méthode de préconditionnement des deux côtés :

$$\mathbf{M}^{-T/2} \nabla^2 C(\mu) \mathbf{M}^{-1/2} \approx \mathbf{I},$$

ainsi, dans le cadre de la méthode du gradient conjugué non linéaire, l'approximation prend la forme

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}^{-T/2} \mathbf{M}^{-1/2} \approx \mathbf{H}^{-1}.$$

3.5 Stratégies générales de préconditionnement

Plusieurs stratégies générales de préconditionnement figurent dans les livres. Un nombre significatif de méthodes générales et adaptées à certains types de problèmes sont couvertes dans Chen (2005). De celles-là, un faible nombre sont adaptées à notre problème du fait de la taille du hessien.

À titre d'exemple, le préconditionneur le plus simple consiste à prendre l'inverse de la diagonale du hessien. La création d'un tel préconditionneur est toutefois problématique puisque l'obtention d'un coefficient de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ nécessite de faire un produit de la matrice de projection par le vecteur de base \mathbf{e}_i , i étant l'indice de la

colonne de la matrice de projection.

Les préconditionneurs basés sur des décompositions de matrices, telle la décomposition de Cholesky, peuvent également difficilement être appliqués à notre problème. En plus du fait qu'un grand nombre de manipulations impliquant la matrice de projection soient nécessaires, la taille des matrices obtenues est trop élevée pour qu'elles soient représentées explicitement en mémoire.

Plusieurs arguments nous ont fait opter naturellement vers des approches tirant profit de matrices circulantes, que nous expliquons dans la prochaine section.

3.5.1 Préconditionneurs circulants

Certains systèmes linéaires peuvent être modélisés par une opération de convolution, c'est-à-dire que, considérant un objet \mathbf{x} et une réponse impulsionnelle

$$\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{n-1}],$$

la sortie du système correspondant s'exprime comme suit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x}.$$

Dans le cas unidimensionnel, la structure de la matrice \mathbf{H} correspondante est dite Toeplitz, par exemple

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ \dots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & \dots & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}.$$

Si, de plus, la réponse impulsionnelle et l'objet sont périodiques, la matrice sera dite circulante :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & h_1 \\ h_1 & h_0 & h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots \\ h_2 & h_1 & h_0 & h_{n-1} & h_{n-2} \\ \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & h_{n-1} \\ h_{n-1} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}.$$

On note qu'une matrice circulante est un cas particulier de matrice Toeplitz.

Une matrice structurée de telle sorte possède des propriétés importantes. Celle à laquelle on s'intéresse ici concerne l'opération de convolution à laquelle elle correspond. Cette dernière, en passant dans le domaine de Fourier, s'exprime par le produit terme à terme du spectre de l'objet et de la réponse fréquentielle $\mathbf{\Lambda}$ du système :

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathbf{\Lambda} \mathcal{F} \{ \mathbf{x} \} \},$$

ou sous forme matricielle :

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathcal{F}^{-1} \mathbf{\Lambda} \mathcal{F} \mathbf{x}.$$

\mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} représentent respectivement les opérateurs matriciels de la transformée et de la transformée inverse de Fourier.

La plus importante conséquence d'une telle formulation concerne le fait que la matrice \mathbf{H} est extrêmement simple à diagonaliser. La matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}$ de ses valeurs propres est constituée des coefficients de la réponse fréquentielle associée à \mathbf{h} . Ces derniers sont obtenus en évaluant la transformée de Fourier de \mathbf{h} , c'est-à-dire de la première colonne de \mathbf{H} . De cette facilité à la diagonaliser, son inverse est tout aussi simple à obtenir et ne demande que l'inversion d'une matrice diagonale.

Dans le cas bidimensionnel, on obtient une formulation semblable. Cette fois, pour une image mise sous forme d'un vecteur, on se retrouve avec une matrice \mathbf{H}

dite bloc-circulante à blocs circulants (BCBC). Ses valeurs propres s'obtiennent en évaluant la transformée bidimensionnelle de la réponse impulsionnelle \mathbf{h} .

Le stockage d'une telle matrice ne nécessite alors que le stockage de ses valeurs propres. Enfin, la performance des algorithmes de transformée de Fourier rapides permet d'effectuer des produits matrice-vecteur très rapidement.

Si le problème s'y prête bien, de telles matrices font généralement d'excellents préconditionneurs.

3.6 Approximation circulante proposée

Rappelons premièrement qu'en dimensions infinies, il existe un fort lien entre l'objet et ses projections dans le domaine de Fourier. Deuxièmement, les matrices de différences premières, qui correspondent aux dérivées de l'objet, sont des matrices de convolution et peuvent alors également être exprimées dans le domaine de Fourier. Ces deux arguments sont suffisants pour qu'une solution de préconditionnement basée sur les matrices circulantes soit envisagée.

Une des difficultés rencontrées a toutefois été de contourner astucieusement le fait que le système d'équations pour la reconstruction tomographique ne soit pas circulant, quoiqu'il s'en rapproche. Il en va de même pour le terme de pénalisation qui est, de plus, on le rappelle, non linéaire. Nous verrons, dans cette section, quelles stratégies ont été employées pour le développement d'une approximation circulante du hessien.

Les deux termes de ce dernier étant de structure différente, nous avons scindé le problème en deux, c'est-à-dire qu'on a cherché une approximation circulante adaptée à chaque terme de manière indépendante.

3.6.1 Terme d'adéquation aux données

Nous proposons deux approches pour obtenir une approximation circulante du premier terme du hessien. Ces approximations sont évaluées et comparées à la section 4.2.4.1.

Nous évaluerons premièrement une approximation basée sur la réponse impulsionnelle de la projection suivie d'une rétroprojection au centre de l'image, c'est-à-dire la colonne du hessien correspondant à l'échantillon du centre de l'image.

Il paraît également logique que la réponse impulsionnelle la plus représentative de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ soit celle qu'on obtient en moyennant la contribution de toutes les colonnes du hessien. Or cette moyenne est difficilement calculable puisque cela nécessite l'évaluation de toutes les colonnes du hessien. Pour les images de taille 512×512 que nous souhaitons reconstruire, c'est plus de 250 000 colonnes de plus de 250 000 composantes chacune.

À titre de compromis, nous suggérons plutôt de prélever un certain nombre de ces colonnes à partir desquelles nous formerons une approximation circulante. Le nombre de colonnes à utiliser est aussi un paramètre dont nous étudions l'effet à la section 4.2.4.1.

Les colonnes sont choisies au hasard afin d'éviter que l'échantillonnage ne reproduise certains patrons qui pourraient être présents au niveau du hessien.

Pour la construction d'approximations circulantes à partir d'une autre colonne que la première, une étape de recentrage est nécessaire.

Dans le cas unidimensionnel, chaque colonne d'une matrice circulante est décalée d'une position vers le bas par rapport à celle qui se trouve à sa gauche. Une colonne

d'indice j doit ainsi être décalée de $j - 1$ indices vers le haut. Les coefficients sortant vers le haut sont ramenés à la fin de la colonne.

Pour une matrice BCBC, chaque colonne correspond à une réponse impulsionnelle bidimensionnelle. Il n'est alors pas suffisant de décaler la colonne de la matrice vers le haut. Il faut plutôt correctement recentrer cette réponse impulsionnelle en tenant compte de sa position dans l'espace bidimensionnel.

Ainsi, la réponse impulsionnelle correspondant à l'échantillon à la ligne n_r et la colonne n_c de l'image constitue la colonne

$$j = (n_c - 1)N_r + n_r$$

du hessien.

À l'inverse, la colonne j du hessien correspond à l'échantillon à la colonne

$$n_c = \left\lceil \frac{j}{N_r} \right\rceil$$

et à la ligne

$$n_r = j - (n_c - 1)N_r$$

de l'image.

Ainsi, la colonne j doit d'abord être mise sous forme d'un tableau bidimensionnel. Les composantes de ce tableau doivent ensuite subir un décalage de $(-n_c + 1, -n_r + 1)$ positions. On obtient finalement les valeurs propres, sous forme d'un tableau bidimensionnel également, de la matrice BCBC en prenant la transformée de Fourier bidimensionnelle de ce tableau.

3.6.2 Terme de régularisation

La construction des approximations proposées pour $\nabla^2 R(\mu)$ est basée sur le fait que le produit de matrices circulantes est circulant. On peut s'en convaincre en se représentant l'opération dans le domaine de Fourier. Deux conditions peuvent alors être énoncées pour qu'une approximation du hessien soit circulante :

1. Les matrices de différences $\mathbf{D}^{(m)}$ doivent être circulantes.
2. La diagonale entre les matrices de différences et leur transposée doit être circulante, donc constante.

La première condition est quasiment respectée en pratique. En effet, les matrices $\mathbf{D}^{(m)}$ sont bloc-Toeplitz à blocs Toeplitz (BTBT). Ce qui la différencie d'une matrice BCBC est l'hypothèse de périodicité que cette dernière admet. Considérant que les réponses impulsionnelles correspondant aux matrices de différences sont de longueur égale à 2, si on considère également que l'objet a une bordure nulle, alors que ces matrices soient BTBT ou BCBC ne fait aucune différence.

Pour respecter la deuxième condition, nous définissons, pour chaque terme de régularisation, une constante χ_m telle que

$$\nabla^2 R(\mu) \approx \sum_{m=1}^M \chi_m^2 (\mathbf{D}^{(m)})^T \mathbf{D}^{(m)}.$$

Nous proposons deux approximations circulantes, qui sont évaluées empiriquement à la section 4.2.4.2. Ces approximations sont obtenues en prenant respectivement

1. la dérivée seconde de la fonction de pénalisation à zéro :

$$\chi_m^2 = w_m^2 \psi''(0) = w_m^2 / \delta;$$

2. la moyenne des dérivées secondes au point courant :

$$\chi_m^2 = w_m^2 \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \psi'' \left(w_m [\mathbf{D}^{(m)} \mu]_j \right).$$

Le premier choix est justifié par le fait qu'aux alentours de la solution, les contraintes douces $\mathbf{D}^{(m)}\mu \approx 0$ sont pratiquement satisfaites.

La deuxième expression est obtenue en posant l'hypothèse que l'incorporation d'information sur le hessien à chaque point μ mènera à une plus grande réduction du nombre d'itérations du gradient conjugué sans, toutefois, causer une augmentation significative du temps de calcul.

En exprimant les matrices de différences dans le domaine de Fourier :

$$(\mathbf{D}^{(m)})^T \mathbf{D}^{(m)} = \mathcal{F}_2^{-1} \mathbf{\Lambda}_p^{(m)} \mathcal{F}_2,$$

on a

$$\nabla^2 R(\mu) \approx \mathcal{F}_2^{-1} \left[\sum_{m=1}^M \chi_m^2 \mathbf{\Lambda}_p^{(m)} \right] \mathcal{F}_2.$$

Finalement, en rassemblant les approximations circulantes de tous les termes, on obtient l'expression de l'approximation circulante pour tout le hessien :

$$\nabla^2 C(\mu) \approx \mathcal{F}_2^{-1} \left[\mathbf{\Lambda} + \lambda \sum_{m=1}^M \chi_m^2 \mathbf{\Lambda}_p^{(m)} \right] \mathcal{F}_2$$

3.6.2.1 Expressions efficaces pour le calcul de $\mathbf{\Lambda}_p^{(m)}$

Les colonnes des matrices de différences $\mathbf{D}^{(m)}$ contiennent une seule ou deux composantes non nulles. Il est alors possible d'obtenir des expressions plus efficaces pour le calcul numérique des valeurs propres des matrices $(\mathbf{D}^{(m)})^T \mathbf{D}^{(m)}$.

La première matrice ($m = 0$) étant identité, on a d'abord $\mathbf{\Lambda}_p^{(0)} = \mathbf{I}$.

Considérons ensuite la matrice des différences verticales. La première colonne, peu importe la taille de l'image, a comme premiers coefficients un 1 suivi d'un -1. Pour le produit $(\mathbf{D}^{(1)})^T \mathbf{D}^{(1)}$, la première colonne débute par 2, -1 et se termine par -1.

L'expression de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle correspondante est alors constituée de trois termes, de sorte que

$$\Lambda_p^{(1)}(k, l) = 2 - e^{-2i\pi \frac{k}{N_r}} - e^{2i\pi \frac{k}{N_r}}$$

Un raisonnement semblable pour les autres matrices de différences amène également des expressions simples. Pour les différences horizontales, on a

$$\Lambda_p^{(2)}(k, l) = 2 - e^{-2i\pi \frac{l}{N_c}} - e^{2i\pi \frac{l}{N_c}}.$$

Enfin pour les différences en diagonale on a

$$\Lambda_p^{(3)}(k, l) = 2 - e^{-2i\pi (\frac{k}{N_r} + \frac{l}{N_c})} - e^{2i\pi (\frac{k}{N_r} + \frac{l}{N_c})}$$

et

$$\Lambda_p^{(4)}(k, l) = 2 - e^{-2i\pi (\frac{k}{N_r} - \frac{l}{N_c})} - e^{2i\pi (\frac{k}{N_r} - \frac{l}{N_c})}.$$

Les matrices $\Lambda_p^{(m)}$ correspondantes sont obtenues en créant une matrice diagonale à partir de ces réponses impulsionnelles bidimensionnelles.

3.7 Préconditionneur de Fessler et Booth

3.7.1 Problème et critère étudiés

Le preconditionneur proposé par Fessler et Booth (Fessler and Booth, 1999) est développé pour la reconstruction d'images en tomographie d'émission monophotonique (SPECT). Les similarités entre cette modalité d'imagerie et la tomographie à rayons X sont évidentes, de sorte que leur approche peut fort probablement être appliquée à notre problème de reconstruction.

Le modèle de formation de données SPECT peut s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

La quantité \mathbf{x} représente la concentration d'un radio-isotope injecté avant l'examen. La matrice \mathbf{G} correspond à la matrice de projection pour la tomographie d'émission monophotonique et est analogue à la matrice de projection \mathbf{A} pour la tomographie à rayons X. Le vecteur \mathbf{b} représente le bruit de mesure qui suit une loi de Poisson. Le vecteur \mathbf{y} est alors le nombre de photons détectés par chaque élément de détection.

La méthode de reconstruction de Fessler et Booth est basée sur la minimisation du critère

$$C_{\text{FB}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{G}\mathbf{x})^T \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{G}\mathbf{x}) + \lambda \sum_{j=1}^J \psi \left([\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{c}]_j \right)$$

dont le hessien s'exprime ainsi :

$$\nabla^2 C_{\text{FB}}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G} + \lambda \mathbf{C}^T \text{diag} \{ \psi''([\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{c}]_k) \} \mathbf{C}.$$

En pratique, les auteurs fixent $\mathbf{c} = 0$. Ce critère est tout à fait semblable au nôtre, à deux choses près.

On note premièrement que la fonction de régularisation n'est composée que d'un seul terme. On peut ramener notre fonction de régularisation sous la même forme en posant

$$\mathbf{C} = [w_0(\mathbf{D}^{(0)})^T, w_1(\mathbf{D}^{(1)})^T, w_2(\mathbf{D}^{(2)})^T, w_3(\mathbf{D}^{(3)})^T, w_4(\mathbf{D}^{(4)})^T]^T.$$

Deuxièmement, et c'est ce qui différencie vraiment les deux critères, la matrice \mathbf{W} , qui est l'inverse de la matrice de covariance du bruit de mesure \mathbf{b} , est considérée comme proportionnelle à l'identité dans notre cas, car on a posé l'hypothèse d'un modèle gaussien de variance constante (section 1.1.5.2). Dans le cas de la reconstruction d'images à partir de données SPECT, toutefois, le faible compte de photons

nécessite la modélisation de la formation des données par des lois de Poisson dont la variance varie fortement d'une mesure à l'autre.

Les mesures étant considérées comme indépendantes les unes des autres, cette matrice est diagonale, mais ses composantes sont très variables, faisant en sorte que le terme $\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}$ ne puisse plus être considéré quasi-circulant.

Le même constat peut être effectué pour ce qui est du terme de pénalisation où $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ est considéré comme quasi-circulant. Considérant une fonction de pénalisation non quadratique, on a plutôt $\mathbf{C}^T \text{diag} \{ \psi''([\mathbf{C}\mu]_k) \} \mathbf{C}$ avec une diagonale dont les composantes varient.

3.7.2 Méthode proposée, adaptée à notre problème

Ayant exposé les similitudes et les différences entre les problèmes de reconstruction d'images SPECT et de tomographie à rayons X, et identifié ce qui rend difficile l'utilisation d'une approximation circulante, nous reprendrons, dans ce qui suit, le développement de Fessler & Booth (1999) en l'adaptant à notre problème. On en retire deux approximations de l'inverse du hessien qui ont été évaluées et dont les résultats sont exposés à la section 4.2.5.

Le développement de la méthode est basé sur l'hypothèse que

$$\mathbf{K}(\eta) = \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \eta \mathbf{C}^T \mathbf{C}$$

admet une approximation circulante, c'est-à-dire que

$$\mathbf{K}(\eta) \approx \mathcal{F}^{-1} \Lambda(\eta) \mathcal{F}.$$

Il s'agit précisément de la forme dont il était question à la section 3.6.

Une succession d'approximations du hessien est effectuée afin de tirer avantageusement profit de la performance d'un préconditionneur circulant tout en tenant compte du caractère variant spatialement de la reconstruction.

Les deux premières étapes permettent de faire sortir les deux matrices diagonales à l'extérieur de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ et de $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$. On a alors premièrement

$$\mathbf{H}_1(\mu) \triangleq \mathbf{D}_\kappa \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{D}_\kappa + \lambda \mathbf{C}^T \text{diag} \left\{ \psi'' \left([\mathbf{C}\mu - \mathbf{c}]_j \right) \right\} \mathbf{C},$$

avec

$$\mathbf{D}_\kappa \triangleq \text{diag} \{ \kappa_j \}$$

et

$$\kappa_j \triangleq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^I a_{ij}^2 W_{ii}}{\sum_{i=1}^I a_{ij}^2}}.$$

Cela revient à choisir κ_j tel que

$$\mathbf{e}_j^T \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}^T \kappa_j^2 \mathbf{A} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^T \kappa_j \mathbf{A}^T \mathbf{A} \kappa_j \mathbf{e}_j.$$

On fait, deuxièmement, une approximation semblable impliquant le terme de régularisation :

$$\mathbf{H}_2(\mu) \triangleq \mathbf{D}_\kappa \left[\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{D}_\eta(\mu) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{D}_\eta(\mu) \right] \mathbf{D}_\kappa,$$

avec

$$\mathbf{D}_\eta \triangleq \text{diag} \left\{ \sqrt{\eta_j(\mu)} \right\},$$

et

$$\eta_j(\mu) \triangleq \frac{\lambda}{\kappa_j^2} \times \frac{\sum_k c_{kj}^2 \psi''([\mathbf{C}\mu]_k)}{\sum_k c_{kj}^2}.$$

Pour assurer la définie positivité des approximations, la majeure partie du travail est faite sur la racine carrée de l'inverse du hessien. On définit, dans cette optique,

la matrice $\mathbf{B}(\mu)$, qui sera sujette aux prochaines approximations ; cela permet de laisser \mathbf{D}_κ de côté :

$$\mathbf{B}(\mu) \triangleq \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mathbf{D}_\eta(\mu) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{D}_\eta(\mu).$$

Le hessien étant défini positif, alors $\mathbf{B}(\mu)^{1/2}$ existe. Il n'est cependant pas nécessaire que l'approximation de la racine carrée soit définie positive ; on formule ainsi cette dernière comme le produit d'une matrice et de sa transposée :

$$\mathbf{B}^{-1}(\mu) = \mathbf{B}^{-1/2}(\mu) \mathbf{B}^{-1/2}(\mu) \approx \mathbf{S}(\mu)^T \mathbf{S}(\mu).$$

L'objectif est donc de trouver une approximation $\mathbf{S}(\mu)$ de $\mathbf{B}^{-1/2}(\mu)$ dont le produit par un vecteur se calcule efficacement.

Une heuristique est ensuite proposée, qui consiste à considérer l'effet de la pénalisation comme étant très local, c'est-à-dire que η_j détermine à toute fin pratique l'image qui serait obtenue considérant une source ponctuelle à l'échantillon j de l'image.

Cette caractéristique est modélisée par

$$\mathbf{B}^{-1/2}(\mu) \mathbf{e}_j \approx \mathbf{K}^{-1/2}(\eta_j(\mu)) \mathbf{e}_j.$$

Considérant l'approximation circulante pour $\mathbf{K}(\eta)$, et la décomposition d'une matrice en une somme de ses colonnes, on a

$$\mathbf{B}^{-1/2}(\mu) \mathbf{e}_j \approx \mathcal{F}^{-1} \mathbf{\Lambda}^{-1/2}(\eta_j(\mu)) \mathcal{F} \mathbf{e}_j,$$

et

$$\mathbf{B}^{-1}(\mu) \approx \left[\sum_{j=1}^J \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T \mathcal{F}^{-1} \mathbf{\Lambda}^{-1/2}(\eta_j(\mu)) \right] \left[\sum_{j=1}^J \mathbf{\Lambda}^{-1/2}(\eta_j(\mu)) \mathcal{F} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^T \right].$$

Cette formulation correspond à une combinaison de matrices circulantes. L'utilisation de cette approximation à titre de préconditionneur n'est pas pratique, puisqu'elle nécessite d'effectuer $2J$ opérations de transformée de Fourier rapide.

On propose enfin de réduire le nombre d'approximations circulantes effectivement utilisées. Pour ce faire, on choisit un faible nombre K de valeurs $\tilde{\eta}_k$ couvrant la plage des valeurs η_j , $j = 1, \dots, J$. On calcule ensuite les coefficients de la transformée de Fourier 2D, $\Lambda_k = \Lambda(\tilde{\eta}_k)$, pour chacune de ces valeurs $\tilde{\eta}_k$.

Une étape d'interpolation permet de déterminer les coefficients de la transformée de Fourier pour η_j à partir de ceux qu'on a calculés pour $\tilde{\eta}_k$:

$$\Lambda^{-1/2}(\eta_j(\mu)) \approx \sum_{k=1}^K \gamma_k(\eta_j(\mu)) \Lambda_k^{-1/2}.$$

Le calcul des valeurs de $\gamma_k(\eta_j(\mu))$ est expliqué à la section 3.7.3 ci-dessous.

De cette étape d'interpolation, on obtient la première approximation qui soit utilisable en pratique :

$$\mathbf{M}_1(\mu) = \mathbf{D}_\kappa^{-1} \left[\sum_{k=1}^K \mathbf{D}_{\gamma_k}(\mu) \mathcal{F}^{-1} \Lambda_k^{-1/2} \right] \left[\sum_{k=1}^K \Lambda_k^{-1/2} \mathcal{F} \mathbf{D}_{\gamma_k}(\mu) \right] \mathbf{D}_\kappa^{-1}.$$

Un autre préconditionneur est obtenu en laissant tomber les termes croisés :

$$\mathbf{M}_2(\mu) = \mathbf{D}_\kappa^{-1} \left[\sum_{k=1}^K \mathbf{D}_{\gamma_k}(\mu) \mathcal{F}^{-1} \Lambda_k^{-1} \mathcal{F} \mathbf{D}_{\gamma_k}(\mu) \right] \mathbf{D}_\kappa^{-1}.$$

Dans les deux cas, $2K$ transformées de Fourier rapides sont nécessaires à chaque itération pour appliquer le préconditionneur. Dans le second, toutefois, le nombre de produits de matrices par des vecteurs est légèrement inférieur.

3.7.3 Calcul des coefficients de Fourier pour $\tilde{\eta}_k$

La plage des valeurs de η_j peut être facilement établie considérant que la dérivée seconde $\psi''(t)$ de notre fonction de pénalisation est maximale en $t = 0$:

$$\max_t \{\psi''(t)\} = \psi''(0) = 1/\delta.$$

Ainsi,

$$\max_j \eta_j \leq \frac{\lambda}{\kappa_j \delta}.$$

Considérant qu'en plusieurs endroits, l'image est nulle, les termes de gauche et de droite seront le plus souvent égaux.

Pour un nombre K d'approximations circulantes, on choisit les valeurs de $\tilde{\eta}_k$ couvrant toute la plage. Nous les avons choisies de sorte qu'elles soient réparties de manière logarithmique dans l'intervalle $[0, 05; \max_j \{\eta_j\}]$.

Enfin, à titre d'approximation pour $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, nous utilisons l'approximation circulante moyennant 100 colonnes du hessien décrite à la section 3.6.1.

3.8 Conclusion

Nous avons d'abord mentionné que les méthodes itératives étaient sensibles au conditionnement du problème à résoudre. La méthode du gradient conjugué, en particulier, est sensible à la distribution des valeurs propres et est plus performante lorsqu'elles sont regroupées.

À la fois le hessien du terme d'adéquation aux données de notre fonction objectif et celui du terme de régularisation admettent d'élégantes approximations circulantes. De telles matrices sont diagonalisées par la transformée de Fourier, rendant ainsi très performants leur produit par des vecteurs, leur inversion ainsi que leur stockage en mémoire. Les méthodes basées sur de telles matrices sont prometteuses pour le préconditionnement de notre problème.

Nous avons également vu l'approche proposée par Fessler et Booth, qui réalise une approximation de l'inverse du hessien en combinant plusieurs matrices circulantes.

Les résultats obtenus avec les diverses approches sont présentés au chapitre 4 et montreront le succès de ces dernières.

CHAPITRE 4

SIMULATION ET RÉSULTATS

Dans ce chapitre, nous allons démontrer l'atteinte des objectifs du présent travail, qu'on rappelle ici :

L'objectif général de ce travail est de mettre en œuvre des outils pour la reconstruction tomographique monochromatique et polychromatique proposée par Nathalie Menvielle, de sorte qu'il soit possible de reconstruire des images cliniques sur un ordinateur bon marché en un temps de l'ordre de quelques minutes.

Cet objectif peut être scindé en trois sous-objectifs :

1. Mettre en œuvre de manière efficace les opérations de projection et de rétro-projection en tenant compte de la géométrie de tomographes commerciaux.
2. Accélérer les méthodes d'optimisation par la mise en œuvre d'une méthode de recherche linéaire et d'un préconditionneur adaptés au problème linéaire de reconstruction tomographique.
3. Valider les méthodes sur des données cliniques.

Nous évaluerons d'abord les performances des deux approches mises en œuvre pour la réalisation des opérations de projection et de rétroprojection, c'est-à-dire impliquant un stockage par segments de longueur fixe et de longueur variable. Ces méthodes sont décrites à la section 2.5. Nous comparerons ensuite les temps de calcul pour la projection, qu'elle soit effectuée avec ou sans matrice.

Nous évaluerons ensuite l'efficacité des méthodes permettant d'accélérer les reconstructions. Nous avons présenté des méthodes de recherche linéaire, à la section 1.2.4, et de préconditionnement, au chapitre 3, qui seront comparées.

Il faut, pour ce faire, générer des données de simulation. Les hypothèses sous lesquelles ces données ont été obtenues seront explicitées. Les paramètres de régularisation, dont il a été question à la section 1.1.5.3, pour divers niveaux de bruit, doivent être fixés. Une section sera consacrée à cet aspect.

Nous appliquerons la méthode de reconstruction à des données réelles. Le contexte d'acquisition de ces données et leur format seront d'abord décrits. La comparaison des images avec celles de Siemens demande quelques adaptations qui seront expliquées. Enfin, nous verrons comment le paramètre de régularisation λ a pu être obtenu. La qualité de l'image sera évaluée des points de vue de la résolution, de la valeur du coefficient d'atténuation reconstruit et de la capacité de détecter de petits objets de faible contraste.

Nous nous assurerons enfin que les méthodes de préconditionnement et de recherche linéaire évaluées sur des données de simulation sont adaptées à la reconstruction de données réelles.

4.1 Projection et rétroprojection

Les résultats présentés dans cette section permettent de vérifier l'atteinte du premier objectif de ce travail. Nous allons ainsi mesurer la performance relative des méthodes décrites à la section 2.4 pour emmagasiner la matrice de projection du point de vue de l'espace mémoire nécessaire à son stockage. Nous comparerons ensuite les temps de calcul des deux méthodes mises en œuvre. Nous mesurerons enfin l'apport de notre méthode par rapport au calcul des projections sans recourir à une matrice.

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus en utilisant une matrice construite à partir des paramètres géométriques du tomographe Siemens SOMA-

TOM 16 énumérés au tableau I.1, en annexe.

Nous avons considéré une matrice correspondant à une image de taille 512×512 . La taille des quantités emmagasinées a été observée comme variant de façon linéaire avec le nombre de coefficients non nuls. Pour le modèle à rayons minces que nous utilisons, ce nombre varie de façon linéaire avec la taille de l'image. De manière relative, les différents formats se comportent de la même manière, de sorte qu'une seule taille est suffisante pour les comparer. Il en va de même pour les temps de calcul.

Nous présentons les résultats pour deux cas de figure : une matrice pour laquelle on emmagasine toutes les lignes et une matrice pour laquelle un huitième des lignes est emmagasiné, ce qui correspond au plus haut niveau d'invariance.

La source volante et le décalage du détecteur n'ont pas été pris en compte ici. Le décalage fait perdre un niveau d'invariance, ne permettant pas la création d'une matrice pour laquelle le huitième des lignes est emmagasiné. De plus, tenir compte de la source volante ne fait que doubler le nombre de blocs de la matrice, ce qui fait également doubler sa taille et le temps de calcul des opérations. Puisqu'on s'intéresse au comportement des méthodes de manière relative, les résultats sont, à toute fin pratique, les mêmes.

4.1.1 Efficacité de stockage

Dans cette section, nous évaluons l'efficacité des méthodes de stockage du point de vue de l'espace occupé en mémoire. Pour chaque méthode vue à la section 2.4, le nombre d'éléments de contrôle requis, le nombre de coefficients à emmagasiner ainsi que la taille totale occupée en mémoire sont calculés. La stratégie de stockage étant appliquée aux blocs de la matrice, et non à la matrice elle-même, ce calcul

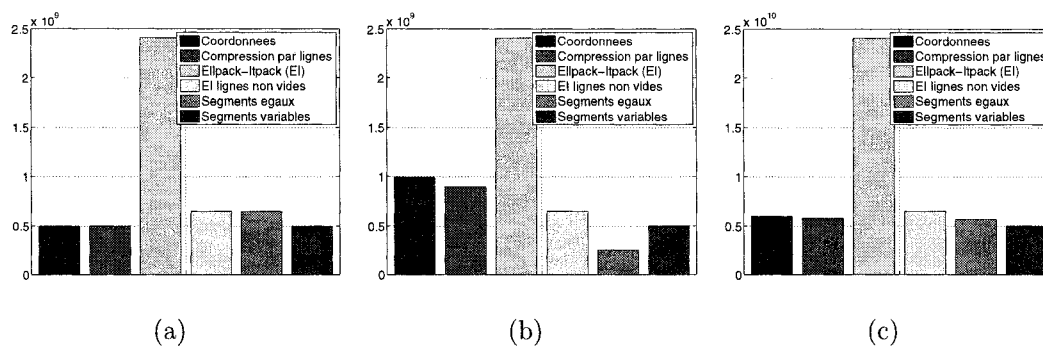


FIG. 4.1 Nombre de coefficients emmagasinés 4.1(a), nombre d'éléments de contrôle 4.1(b) et espace total occupé par la matrice 4.1(c) sans source volante ni décalage lorsqu'on en emmagasine toutes les lignes.

est fait pour chaque bloc individuellement.

La taille totale d'une matrice est calculée en considérant que la structure de contrôle est composée d'entiers de 16 bits et que les coefficients sont représentés par des nombres à virgule flottante à double précision au format IEEE-754. On a ainsi

$$n_{\text{octets}} = 8 \times n_{\text{doubles}} + 2 \times n_{\text{entiers}}.$$

Les deux cas de figure, soit la matrice complète et celle pour laquelle on emmagasine un huitième des lignes, sont suffisants, mais nécessaires, pour caractériser le comportement des méthodes pour tous les cas. Les différences entre les méthodes sont surtout influencées par l'orientation des rayons. Pour une matrice dont on conserve soit le quart, soit la moitié, ou toutes les lignes, l'orientation moyenne des rayons est nulle. Le comportement relatif des diverses méthodes est alors le même pour ces trois cas. Lorsqu'on n'en conserve que le huitième, toutefois, l'orientation moyenne des rayons est plutôt horizontale. On observe donc un comportement différent pour ce cas. Les résultats pour les deux cas de figure sont illustrés aux figures 4.1 et 4.2 respectivement.

Rappelons tout d'abord que trois des six méthodes conservent exactement le nombre

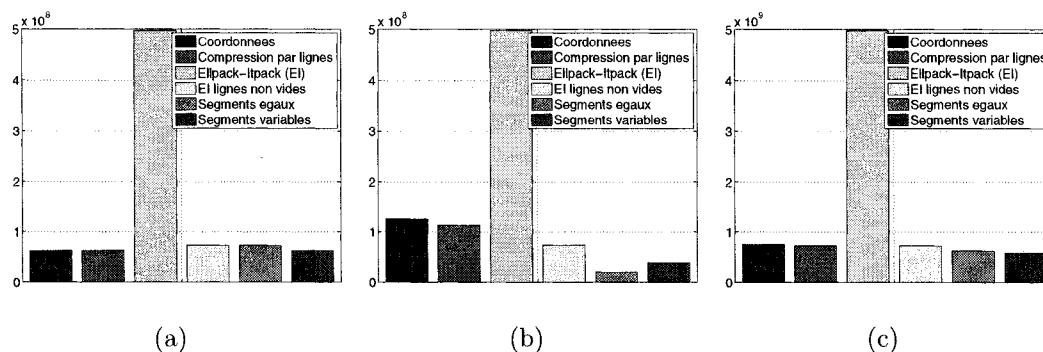


FIG. 4.2 Nombre de coefficients emmagasinés 4.2(a), nombre d'éléments de contrôle 4.2(b) et espace total occupé par la matrice 4.2(c) sans source volante ni décalage lorsqu'on en emmagasine un huitième des lignes.

d'éléments non nuls, soit les méthodes par coordonnées, de compression par ligne et à segments de longueur variable. Les trois autres méthodes, considérant des longueurs fixes de segments, emmagasinent inévitablement un certain nombre de zéros, ce que l'on observe sur les figures 4.1(a) et 4.2(a).

La méthode Ellpack-Itpack se démarque par le nombre de zéros qu'elle doit emmagasiner. On explique ce comportement par le fait que la plupart des blocs contiennent un grand nombre de lignes vides. Également, plus les rayons tendent vers l'horizontale, plus le nombre de lignes vides et la taille des segments horizontaux augmentent. Pour des rayons très horizontaux, on emmagasine alors un grand nombre de longues lignes vides.

On confirme ce lien entre l'orientation des rayons et le nombre de zéros stockés par la méthode Ellpack-Itpack lorsqu'on observe la différence entre les figures 4.1(a) et 4.2(a). Le nombre de coefficients emmagasinés avec ce format est nettement plus élevé, en termes relatifs, pour une matrice dont on ne conserve que le huitième des lignes que pour une matrice dont on conserve toutes les lignes.

Ce nombre est fortement réduit en employant une stratégie à segments de lon-

gueur fixe n'emmagasinant pas les lignes vides. On note enfin que les zéros restants sont complètement éliminés par l'emploi de notre méthode à segments de longueur variable.

Les figures 4.1(b) et 4.2(b) illustrent la taille des structures de contrôle dans le même contexte. À ce niveau aussi, on le comprend facilement en se référant à sa structure, la méthode Ellpack-Itpack ne fait pas très bonne figure. Pour chaque coefficient emmagasiné (dont beaucoup de zéros), l'indice de la colonne doit être emmagasiné, expliquant sa piètre performance. C'est aussi lorsqu'on évite d'emmagasiner les lignes vides que cette méthode devient potentiellement intéressante pour notre application. Cette variante permet de réduire la taille de la structure de contrôle en dessous de celle des autres méthodes générales. C'est aussi en observant le nombre d'entiers à emmagasiner qu'on perçoit le progrès réalisé en ne conservant que l'indice de la première colonne pour chaque segment plutôt que celui de chaque coefficient. Ce dernier se trouve en effet réduit de plus de la moitié lorsqu'on conserve toutes les lignes, et de près des trois quarts lorsqu'on n'en conserve que le huitième.

Enfin, les figures 4.1(c) et 4.2(c) illustrent la taille totale, en octets, de la matrice pour les deux cas. L'observation de la différence entre la méthode Ellpack-Itpack et sa variante tenant compte des lignes non vides des blocs y est pour la majorité du gain d'espace. Cette variante, autant lorsqu'on emmagasine toutes les lignes que lorsqu'on n'en emmagasine que le huitième, demande légèrement plus d'espace mémoire que la méthode de compression par lignes (12 % et 0,29 % respectivement).

Une économie d'espace, par rapport à la compression par lignes, est réalisée lorsqu'on considère l'une ou l'autre de nos méthodes à segments continus. Notre méthode à longueur de segments fixes réduit l'espace nécessaire, pour les deux cas, de 1,6 % et 14 % respectivement. Pour notre méthode à segments de longueur

TAB. 4.1 Temps de calcul pour les opérations impliquant une matrice dont on a stocké toutes les lignes pour une image de taille 512×512 .

	Longueur fixe	Longueur variable
Temps création (s)	417,1800	416,1350
Temps produit matrice vecteur (s)	3,9722	4,2529
Temps produit vecteur matrice (s)	4,9064	4,3242

variable, c'est 14 % et 20 %.

4.1.2 Temps de calcul

Les méthodes à segments de longueur fixe et à segments de longueur variable sont évaluées ici en termes de temps de calcul. Nous débuterons par comparer les deux mises en œuvre. Cela permettra d'identifier celle qui offre la meilleure performance et qui sera utilisée pour les reconstructions. Nous évaluerons également la performance de l'opération de projection avec et sans utilisation d'une matrice.

4.1.2.1 Comparaison des deux méthodes mises en œuvre

Les résultats pour les deux matrices figurent aux tableaux 4.1 et 4.2. Ils sont exprimés en secondes. Nous nous sommes assuré que la machine utilisée pour les calculs n'était affectée qu'à cette tâche afin de ne pas biaiser les résultats.

Le temps pour la création est une moyenne prise sur 10 essais. Les produits vecteur-matrice ont été effectués 100 fois chacun.

Comme on s'y attendait, pour les deux cas, le temps nécessaire à la construction

TAB. 4.2 Temps de calcul pour les opérations impliquant une matrice dont on a stocké un huitième des lignes pour une image de taille 512×512 .

	Longueur fixe	Longueur variable
Temps création (s)	55,8050	55,7230
Temps produit matrice vecteur (s)	2,5843	2,2941
Temps produit vecteur matrice (s)	2,8451	2,5263

d'une matrice constituée de blocs à segments de longueur fixe prend légèrement plus de temps que pour une matrice à segments de longueur variable. L'écart s'explique par l'étape supplémentaire pour la construction du vecteur des composantes pour les blocs à segments de longueur fixe.

De même, les temps de calcul pour effectuer les produits de la matrice par des vecteurs sont en moyenne plus longs avec les blocs à segments de longueur fixe. Il semble que, pour des segments de taille fixe, la réduction du nombre d'accès mémoire due à une structure plus légère est compensée par un nombre supérieur d'accès aux vecteurs des coefficients, de l'image et des projections. À cela s'ajoute un nombre accru d'opérations de multiplication par des coefficients nuls.

On remarque de plus que le temps nécessaire pour réaliser le produit de la matrice par un vecteur colonne est systématiquement plus court que celui pour réaliser le produit d'un vecteur ligne par la matrice. L'écart entre ces deux temps est semblable pour tous les cas, soit environ un quart de seconde, sauf pour la matrice à segments de longueur fixe dont toutes les lignes sont emmagasinées, pour laquelle l'écart avoisine les neuf dixièmes de seconde. On remarque même que, pour ce cas, le produit de la matrice par un vecteur colonne prend moins de temps qu'avec une matrice à segments de longueur variable. La cause de ces écarts, et le fait qu'il

soit différent pour la matrice à segments de longueur fixe lorsqu'on emmagasine toutes ses lignes, n'a pas été identifiée avec précision. Nous pensons toutefois qu'il pourrait s'agir d'une optimisation du compilateur, qui favoriserait un produit par rapport à l'autre. Cette dernière serait particulièrement favorable au produit d'une matrice par un vecteur colonne pour des segments de longueur fixe correspondant à des rayons verticaux. Dans ce cas, les blocs sont constitués de nombreux, mais courts segments.

Aussi, en comparant le temps de création d'une matrice complète avec celui d'une matrice pour laquelle on a emmagasiné le huitième des lignes, on constate que leur rapport est d'environ un huitième. La première contenant huit fois plus de coefficients que la dernière, ces résultats viennent confirmer ce à quoi on s'attend intuitivement.

Le produit de la matrice par un vecteur ne suit cependant pas cette tendance. Ce dernier est plutôt environ deux fois plus court (sauf dans un cas) que huit fois, comme pour la construction de la matrice. Cela s'explique par une diminution par un facteur huit du nombre d'accès en mémoire associée aux coefficients de la matrice. Aucune réduction n'est cependant effectuée au niveau des accès dans les vecteurs de l'image et des projections ni au niveau du nombre d'opérations de multiplication.

4.1.2.2 Produit matrice-vecteur par rapport à la projection

Nous souhaitons finalement comparer le temps nécessaire pour effectuer l'opération de projection en utilisant une matrice par rapport au temps qu'il faut pour la réaliser sans matrice. Cette comparaison permet de valider le choix d'utiliser une matrice de projection malgré son coût de stockage.

Les opérations impliquées dans la création de la matrice sont les mêmes que celles nécessaires à la projection. La création d'une matrice, avec notre modèle à rayons minces et pixels carrés, requiert également un tri des points d'intersection entre les rayons et les frontières de chaque pixel. Il est en plus nécessaire de trier les coefficients dans chaque segment. Un certain nombre d'allocations de mémoire est également nécessaire.

Nous considérons le temps nécessaire pour la formation de la matrice comme étant supérieur, mais du même ordre de grandeur que le temps de calcul de la projection.

La projection, en utilisant le même modèle et considérant qu'on utilise les mêmes invariances que pour le stockage, demande un temps de plus d'un ordre de grandeur supérieur à celui du produit vecteur-matrice. Les opérations de réordonnancement et d'allocation de mémoire ne suffisent pas à expliquer cette différence, ce qui permet de confirmer que l'utilisation d'une matrice conduit effectivement à un gain de performance par rapport au calcul de la projection sans matrice.

4.1.3 Conclusion

Les résultats présentés dans cette section démontrent l'atteinte du premier objectif de ce travail.

Les deux méthodes que nous avons mises en œuvre permettent de réduire l'encombrement mémoire de la matrice par rapport aux méthodes générales. La première, la méthode à segments de taille fixe, bénéficie d'une structure de contrôle très légère au prix de quelques zéros à emmagasiner. La seconde, la méthode à segments de taille variable, n'emmagasine aucun coefficient nul, mais nécessite un plus grand nombre d'entiers de contrôle. Ces deux méthodes sont les plus appropriées au stockage de notre matrice de projection.

La représentation de la matrice de projection par des blocs composés de segments de longueur variable offre les meilleures performances tant au point de vue de l'espace occupé en mémoire que du temps de calcul. C'est par conséquent cette méthode qui a été adoptée pour nos méthodes de reconstruction.

Nous avons enfin montré que l'utilisation d'une matrice de projection résulte en un gain d'efficacité par rapport au calcul de la projection sans matrice et que son stockage explicite apportera un réel bénéfice à nos méthodes de reconstruction.

4.2 Accélération des méthodes

Maintenant que les performances de la matrice de projection ont été évaluées, nous nous servons de cette dernière pour la reconstruction d'images. L'objectif ici est d'évaluer le gain de performance en utilisant des méthodes de recherche linéaire et de préconditionnement adaptées à la structure de notre problème.

La démonstration de l'atteinte de ce deuxième objectif de notre travail nécessite quelques étapes préalables. Premièrement, il est nécessaire de générer des jeux de données synthétiques. Ces derniers sont entachés de différents niveaux de bruit. Il sera par conséquent nécessaire d'obtenir le paramètre de régularisation λ approprié pour chaque série de données.

4.2.1 Génération de données synthétiques

Les données sont simulées à partir d'une version modifiée du fantôme de Shepp-Logan. Ce dernier, habituellement constitué de régions homogènes de différentes densités, est plutôt caractérisé par le coefficient d'atténuation à 70keV de différents matériaux. Les coefficients d'atténuation pour une énergie donnée, pour des sub-

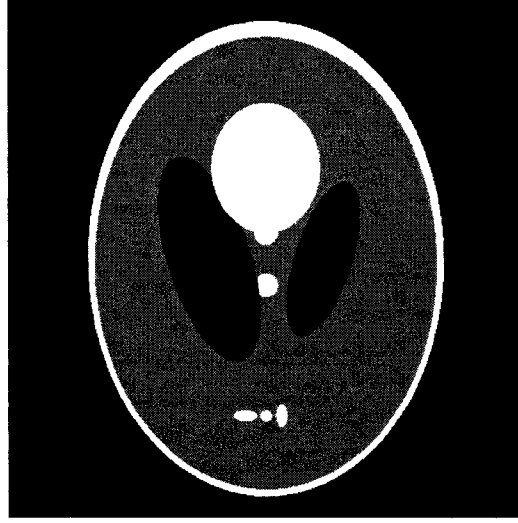


FIG. 4.3 Fantôme de Shepp-Logan constitué d'os, de tissus mous et d'air, utilisé pour la génération de données de simulation.

stances variées, biologiques ou non, sont disponibles sur le site du NIST (National Institute of Standards and Technology (NIST), 1996).

Les propriétés de tous les matériaux de la section de tête représentée n'étant pas connues, nous avons plutôt opté pour une composition à base d'os, de matière grise et d'air. Le fantôme obtenu ne reflète maintenant plus les propriétés anatomiques du fantôme original. Ce fantôme est illustré à la figure 4.3.

Les données générées sont bruitées en suivant un modèle gaussien tel qu'introduit à la section 1.1.5.2. Les projections \mathbf{p} sont alors une réalisation de :

$$\mathbf{P} \sim \mathcal{N} \{ \mathbf{A}\mu, \sigma_B^2 \}.$$

Nous mesurons le niveau de bruit en utilisant le rapport signal sur bruit en décibels défini comme le rapport de la puissance des données à celle du bruit. Considérant un bruit blanc centré et gaussien pour lequel la puissance est égale à la variance,

TAB. 4.3 Valeur du paramètre de régularisation λ minimisant approximativement l'erreur quadratique moyenne pour différents niveaux de bruit.

RSB (dB)	∞	50	40	30	20
λ	0	0,1	0,2	1	2

on a

$$\text{RSB} = 10 \log \left(\frac{\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I p_i^2}{\sigma_B^2} \right).$$

Ainsi, pour un RSB donné, la variance du bruit est obtenue par l'expression

$$\sigma_B^2 = 10^{\frac{-\text{RSB}}{10}} \times \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I p_i^2.$$

4.2.2 Détermination des paramètres de régularisation

Nous cherchons ici à fixer le paramètre de régularisation λ ainsi que le paramètre d'échelle δ de la branche d'hyperbole pour la reconstruction de données simulées.

Le paramètre δ est fixé empiriquement. Les résultats obtenus avec $\delta = 0,01$ sont de bonne qualité.

Le paramètre λ détermine le compromis entre le terme d'adéquation aux données et le terme de pénalisation. Les données sont moins informatives à mesure que le niveau de bruit augmente. On s'attend alors à ce que la valeur de λ augmente conséquemment.

Nous avons simulé la génération des données pour différents niveaux de bruit correspondant à des rapports signal sur bruit infini ainsi que de 50, 40, 30 et 20 décibels. Chacune de ces séries de données a été reconstruite avec différents valeurs de λ .

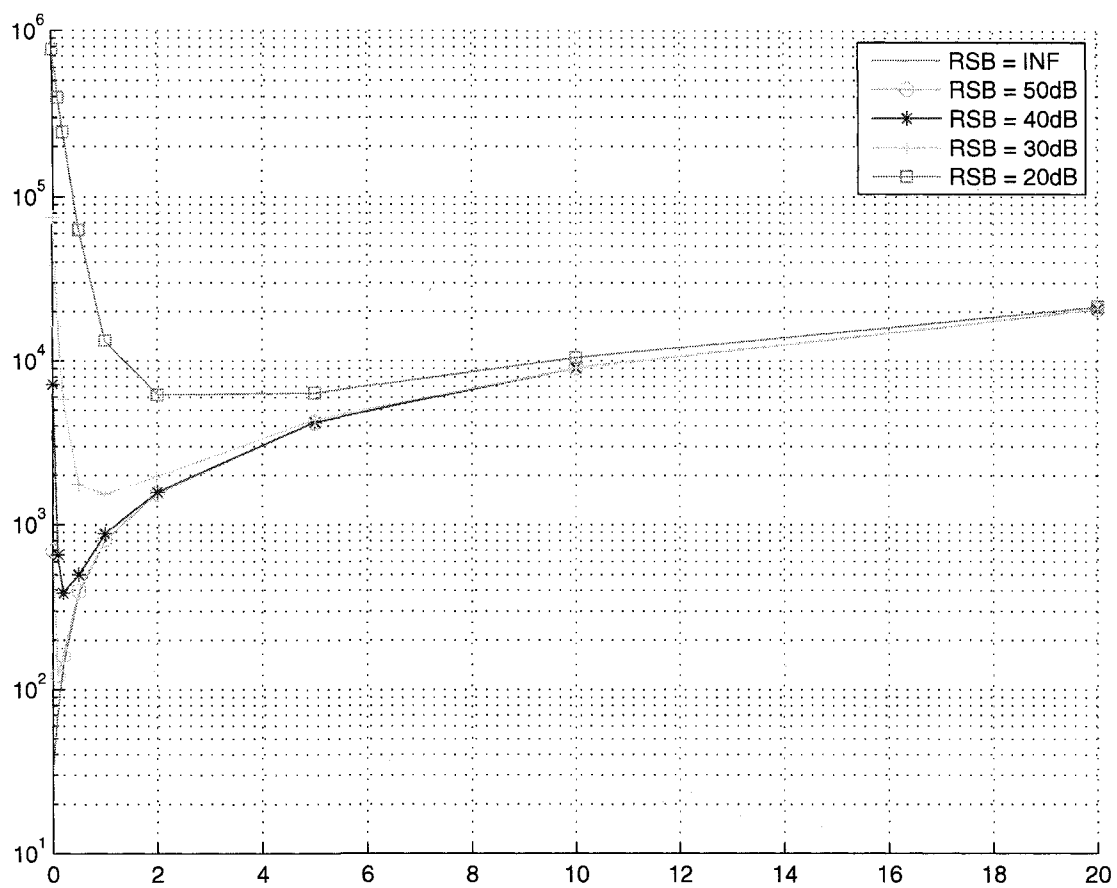


FIG. 4.4 Erreur quadratique moyenne pour la reconstruction du fantôme de Shepp-Logan avec différentes valeurs de λ , pour cinq niveaux de bruit.

Nous optons, connaissant l'objet, pour l'utilisation de la valeur de λ minimisant l'erreur quadratique moyenne de la reconstruction. La figure 4.4 illustre le comportement de cette métrique en fonction de la valeur de λ pour les différents niveaux de bruit. Pour chaque niveau de bruit, la valeur résultant en l'erreur la plus faible est inscrite dans le tableau 4.3.

La figure 4.5 montre quelques reconstructions effectuées avec différents paramètres de régularisation, près de celui qui minimise l'erreur quadratique moyenne, pour deux niveaux de bruit, soit pour un RSB de 20 dB et de 40 dB. De manière plus évidente pour 20 dB que pour 40 dB, on voit les manifestations d'un niveau de bruit plus élevé lorsque la valeur de λ est trop faible, ainsi que l'effet du lissage sur les contours de l'objet lorsque sa valeur est trop élevée.

4.2.3 Évaluation des méthodes de calcul du pas

Nous avons évalué les trois méthodes présentées à la section 1.2.4, c'est-à-dire la méthode de Moré-Thuente et les méthodes de Labat basées sur Geman et Yang et sur Geman et Reynolds, sur quelques problèmes de reconstruction. Nous présentons ici les résultats obtenus pour la reconstruction du fantôme de Shepp-Logan modifié à partir de données non bruitées et à partir de données fortement bruitées, c'est-à-dire avec un RSB de 20 dB.

Les résultats pour les deux séries de données sont illustrés aux figures 4.6 et 4.7 respectivement. Nous y illustrons la valeur de la fonction objectif et la norme du gradient de cette dernière en fonction du nombre d'itérations et du temps.

Nous avons observé, pour toutes les reconstructions que nous avons effectuées, que les méthodes de Labat donnaient des pas de qualité semblable. L'augmentation du nombre I d'itérations qu'on y effectue permet de faire diminuer davantage, mais

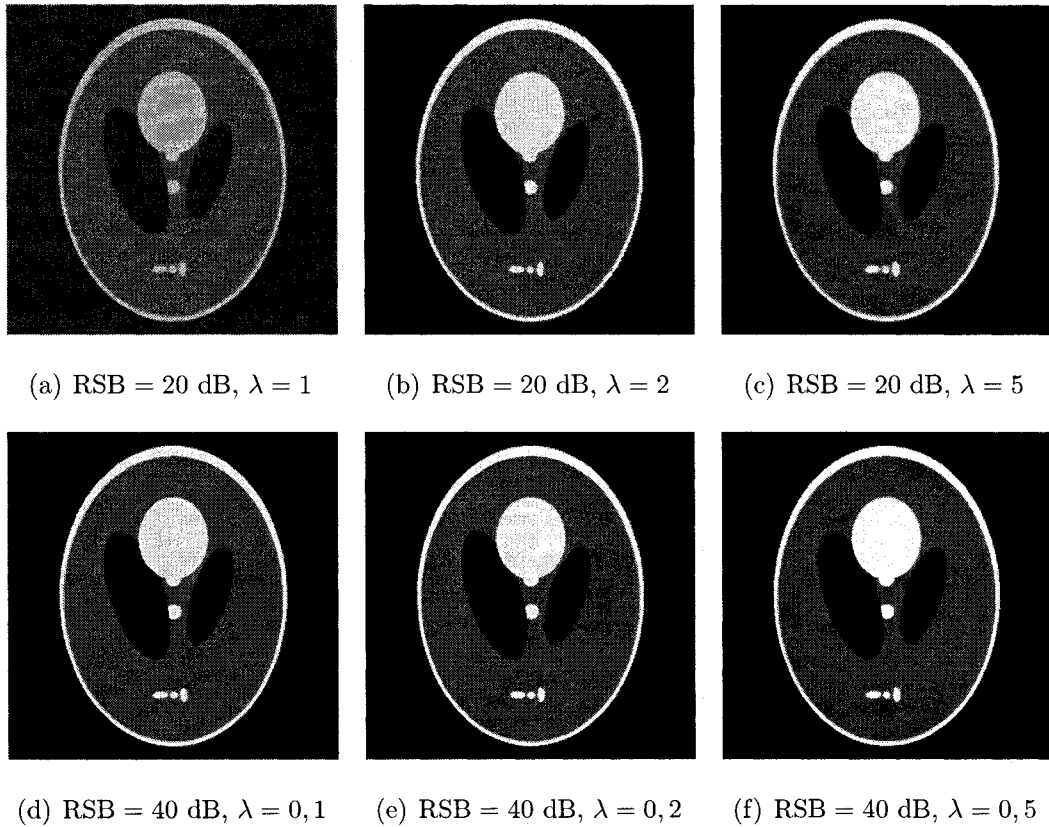
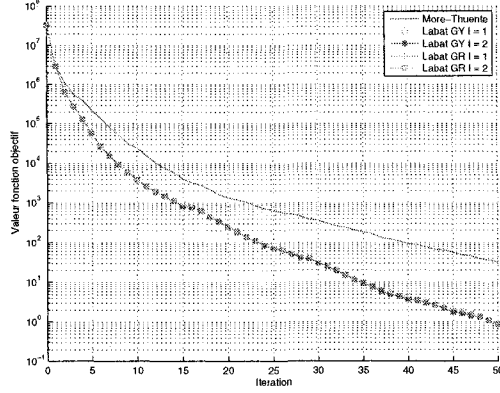
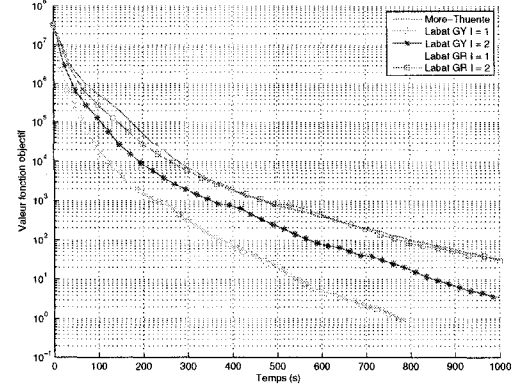


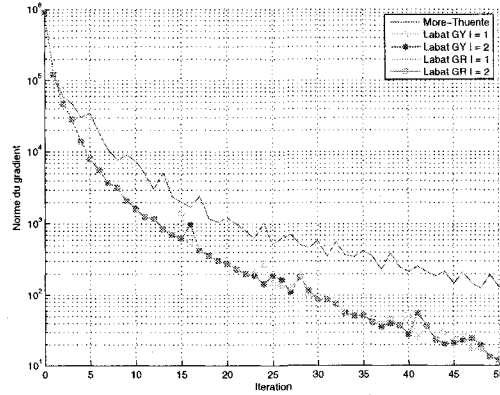
FIG. 4.5 Reconstructions à partir de données simulées bruitées pour des RSB de 20 dB et de 40 dB, avec des valeurs de λ près de la valeur minimisant l'erreur quadratique moyenne. 4.5(a), 4.5(b) et 4.5(c) : reconstructions pour un RSB de 20 dB, avec $\lambda = 1, 2$ et 5 respectivement. 4.5(d), 4.5(e) et 4.5(f) : reconstructions pour un RSB de 40 dB, avec $\lambda = 0,1, 0,2$ et $0,5$ respectivement.



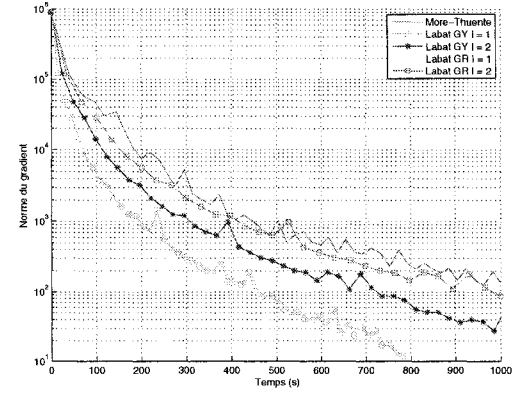
(a)



(b)

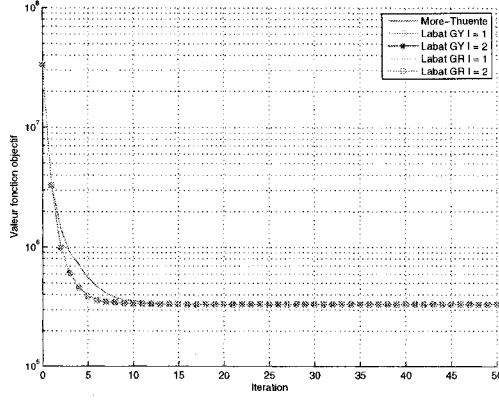


(c)

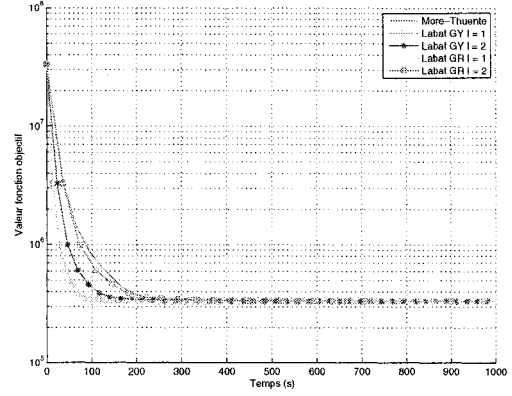


(d)

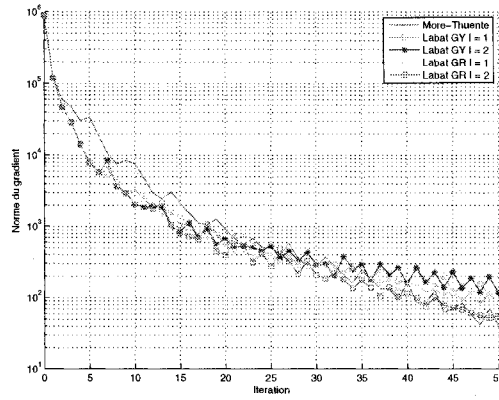
FIG. 4.6 Convergence du gradient conjugué non linéaire avec les différentes méthodes de calcul du pas pour la reconstruction non régularisée d'un jeu de données non bruitées. Valeur du critère en fonction du nombre d'itérations 4.6(a), valeur du critère en fonction du temps 4.6(b), norme du gradient en fonction du nombre d'itérations 4.6(c) et norme du gradient en fonction du temps 4.6(d).



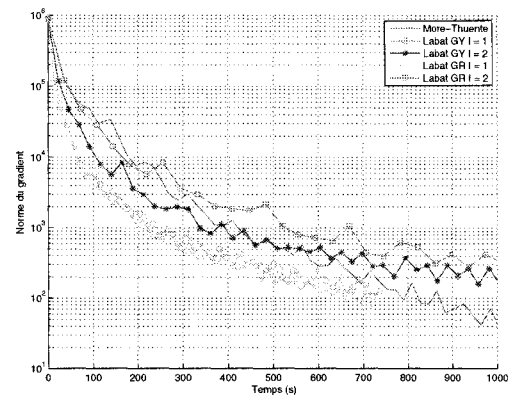
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 4.7 Convergence du gradient conjugué non linéaire avec les différentes méthodes pour le calcul du pas pour la reconstruction régularisée, avec $\lambda = 2$, d'un jeu de données bruitées avec un RSB de 20 dB. Valeur du critère en fonction du nombre d'itérations 4.7(a), valeur du critère en fonction du temps 4.7(b), norme du gradient en fonction du nombre d'itérations 4.7(c) et norme du gradient en fonction du temps 4.7(d).

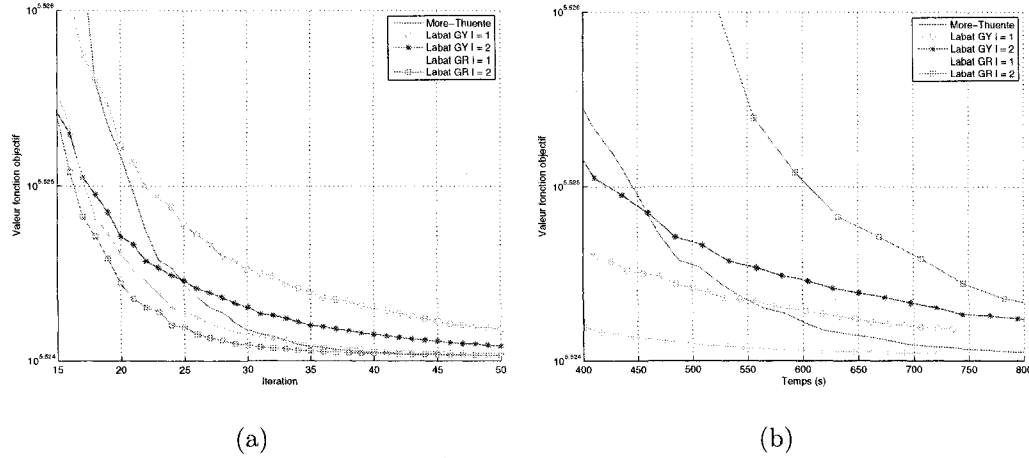


FIG. 4.8 Vue rapprochée sur la valeur de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations et du temps avec les différentes méthodes pour le calcul du pas pour la reconstruction régularisée, avec $\lambda = 2$, d'un jeu de données bruitées avec un RSB de 20 dB. Valeur du critère en fonction du nombre d'itérations 4.8(a), valeur du critère en fonction du temps 4.8(b).

faiblement, la valeur de la fonction objectif et la norme du gradient.

L'augmentation du nombre d'itérations augmente le temps nécessaire à la recherche linéaire. Ces délais sont supérieurs dans tous les cas au gain apporté par la prise de pas de meilleure qualité, de sorte que la réalisation d'une seule itération mène à la descente la plus rapide de la fonction objectif et de la norme du gradient en fonction du temps. C'est également ce qui est rapporté dans Labat & Idier (2006).

Pour le problème non bruité et, par conséquent, non régularisé, les deux méthodes de Labat produisent, lorsque $I = 1$, le pas optimal, la fonction étant quadratique. En fonction du temps, la méthode basée sur la construction de Geman et Yang étant plus rapide, elle résulte, pour ce problème, en une descente plus rapide de la fonction objectif et de la norme de son gradient.

Lorsqu'on augmente le niveau de bruit et la valeur du paramètre de régularisation λ , les pas générés par la méthode basée sur Geman et Reynolds sont de meilleure qualité, pour un nombre d'itérations identique, que ceux pris par la méthode basée sur Geman et Yang, de sorte qu'en fonction du temps, c'est la première méthode qui donne la meilleure vitesse de convergence, malgré que le calcul nécessite un peu plus de temps.

Comparons finalement la méthode de Moré-Thuente aux méthodes de Labat pour une seule itération. Pour la reconstruction avec le critère non régularisé, on observe une nette supériorité des méthodes de Labat par rapport à celle de Moré-Thuente, les premières permettant d'obtenir le pas optimal en un peu plus de l'équivalent d'une évaluation de la fonction et de son gradient. La méthode de Moré-Thuente requiert au minimum deux évaluations de la fonction et de son gradient pour parvenir à un pas satisfaisant les conditions de Wolfe fortes, mais non optimal.

Lorsqu'on augmente le niveau de bruit et le paramètre de régularisation, la fonction objectif n'est plus quadratique. Les méthodes de Labat pour $I = 1$ ne donnent maintenant plus le pas optimal. Au début de la reconstruction, les pas produits par les méthodes de Labat sont de meilleure qualité que ceux produits par la méthode de Moré-Thuente. Au fur à mesure des itérations, cependant, la méthode de Moré-Thuente finit par donner des pas de meilleure qualité que les méthodes de Labat. Par exemple, lorsqu'on observe la valeur de la fonction objectif pour la reconstruction de données bruitées avec un RSB de 20 dB et un paramètre de régularisation $\lambda = 2$, on constate que la méthode de Moré-Thuente rattrape la méthode basée sur Geman et Yang au bout de 20 itérations et celle basée sur Geman et Reynolds au bout de 33 itérations. En fonction du temps, elle rattrape la méthode basée sur Geman et Yang au bout de 550 secondes, c'est-à-dire entre les itérations 37 et 38. Elle n'a toutefois pas encore rattrapé la méthode basée sur Geman et Reynolds au bout de 50 itérations. La figure 4.8 permet de faire ces

observations.

Le même phénomène est perceptible sur la courbe de la norme du gradient, mais il est plus difficile d'établir avec précision le moment où il se produit.

Pour des niveaux de bruit inférieurs, nous avons observé qu'il faut plus de temps pour que la méthode de Moré-Thuente rattrape les méthodes de Labat.

En définitive, nous avons choisi de calculer le pas en effectuant une itération de la méthode de Labat basée sur la construction de Geman et Reynolds.

4.2.4 Évaluation du préconditionneur

Nous allons, dans cette section, commenter les résultats obtenus, lors la reconstruction préconditionnée en utilisant les diverses méthodes détaillées à la section 3.6.

L'évaluation des différents préconditionneurs est effectuée en deux étapes. Nous comparons premièrement les approches proposées pour l'approximation de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. La deuxième étape consiste à compléter la construction du préconditionneur en ajoutant, à la meilleure approximation circulante obtenue, différentes approximations circulantes du terme de régularisation.

4.2.4.1 Approximation circulante de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$

Nous comparons ici les approximations circulantes de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ obtenues, en prenant respectivement la transformée de Fourier bidimensionnelle de

1. la colonne correspondant au centre de l'image ;
2. la moyenne d'un certain nombre de colonnes de la matrice sélectionnées au

hasard. Nous avons utilisé des approximations à 10, 100 et 1000 colonnes.

La convergence avec ces approximations est comparée avec celle de la reconstruction non préconditionnée.

Le terme $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ correspond au hessien d'un critère non régularisé. Les résultats de cette section ont ainsi été obtenus en minimisant ce critère pour un jeu de données non bruitées.

Pour toutes les approximations, les valeurs propres obtenues étaient toutes strictement positives. Ces approximations sont alors toutes symétriques définies positives, ce qui est une condition nécessaire au préconditionnement de l'algorithme du gradient conjugué.

Les courbes de convergence obtenues sont présentées à la figure 4.9. Les quantités représentées sont les mêmes que celles présentées à la section 4.2.3.

Toutes les approximations résultent en une accélération significative de la diminution de la valeur de la fonction objectif et de la norme du gradient. À titre d'illustration, on note qu'après 29 itérations préconditionnées avec la moins bonne de ces approximations, la valeur de la fonction objectif est déjà plus faible que celle qu'on obtient après 50 itérations non préconditionnées.

La convergence suit une tendance similaire pour les quatre approximations. Pour mieux les départager, nous avons représenté, à la figure 4.10, une vue approchée pour les dernières itérations de la valeur de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations. La méthode de calcul des directions préconditionnées étant identique pour les quatre approximations, leur comparaison en termes de nombre d'itérations est suffisante pour les comparer de manière fiable.

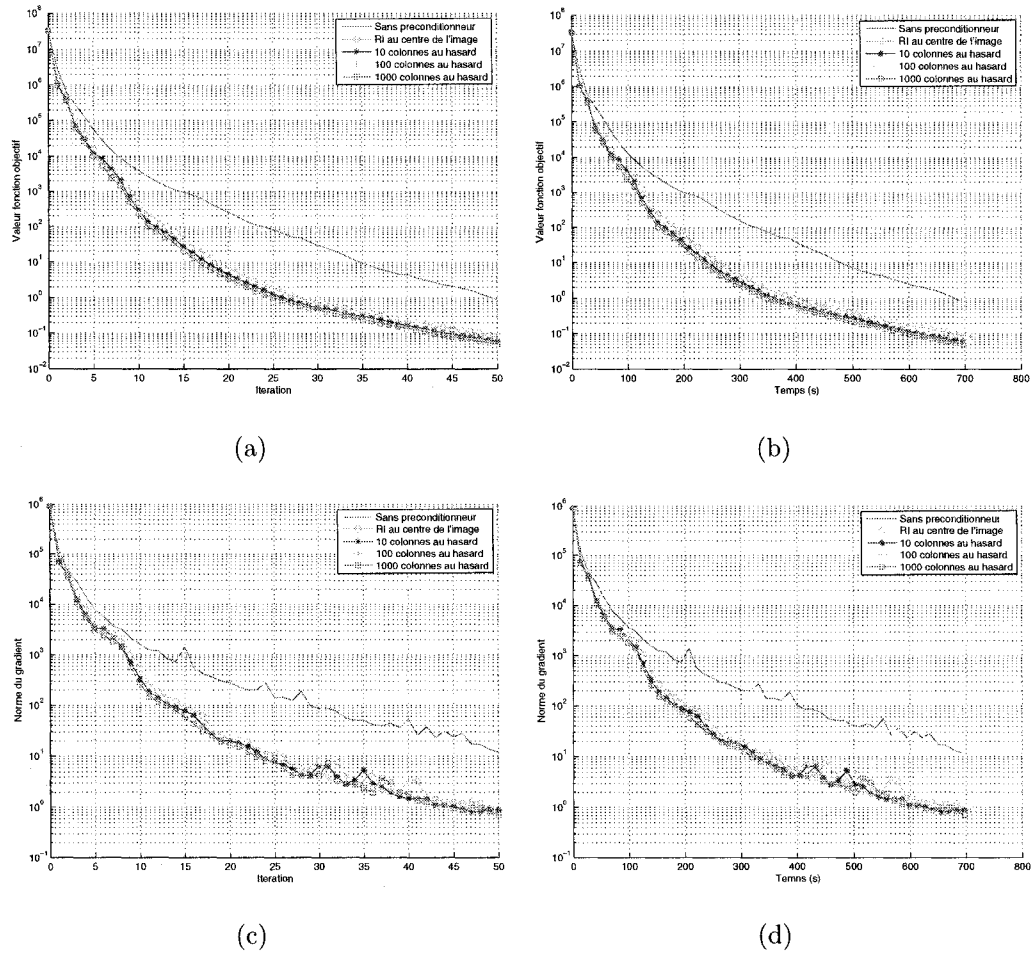


FIG. 4.9 Convergence du gradient conjugué non linéaire pour la reconstruction de données simulées non bruitées avec différences approximations circulantes de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Valeur de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations 4.9(a) et du temps 4.9(b). Norme du gradient en fonction du nombre d'itérations 4.9(c) et du temps 4.9(d).

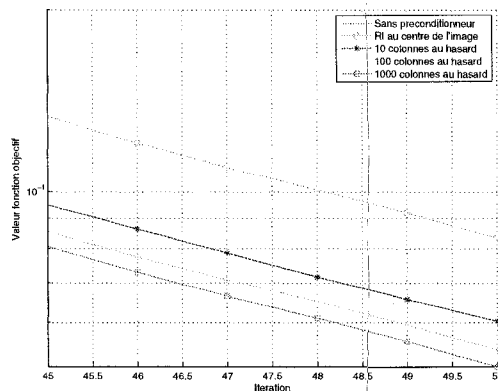


FIG. 4.10 Valeur de la fonction objectif pour la reconstruction préconditionnée avec des approximations circulantes de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ au centre de l'image, et pour 10, 100 ou 1000 colonnes pour les itérations 45 à 50.

On observe que les approximations effectuant la moyenne de plusieurs colonnes sélectionnées au hasard est plus efficace que l'approximation correspondant au centre de l'image.

On constate également que l'utilisation de 100 colonnes, comparativement à 10, permet d'économiser l'équivalent d'un peu plus d'une itération sur les cinquante effectuées. Enfin, lorsqu'on passe de 100 à 1000, le gain réalisé est d'une moindre ampleur. Compte tenu du temps nécessaire pour créer ces approximations, nous estimons que l'utilisation d'une centaine de colonnes constitue un bon compromis. Le temps nécessaire à la création des diverses approximations est inscrit dans le tableau 4.4. Ce temps évolue linéairement avec le nombre de colonnes sélectionnées.

4.2.4.2 Approximation circulante du terme de régularisation

Pour cette deuxième étape, nous ajoutons l'approximation du terme de régularisation à l'approximation circulante à 100 colonnes obtenue à la section précédente.

TAB. 4.4 Temps nécessaire au calcul des approximations circulantes de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ avec différents nombres de colonnes.

Approximation	Temps pour création (s)
Centre de l'image (4 colonnes)	36.27
10 colonnes au hasard	90,00
100 colonnes au hasard	901,06
1000 colonnes au hasard	9012,70

Les différentes approches vues à la section 3.6.2 à cet effet sont évaluées.

Nous allons comparer les deux approximations circulantes de la fonction de pénalisation qu'on obtient en prenant :

1. la dérivée seconde de la fonction de pénalisation à zéro ;
2. la moyenne des dérivées secondes au point courant.

La convergence avec ces deux approximations est comparée avec celle qu'on observe sans préconditionnement et avec le hessien au point courant ainsi qu'à zéro. Nous observerons enfin l'effet de ne considérer que l'approximation circulante de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Le préconditionnement par l'inverse des hessiens au point courant et à zéro est effectué, dans chaque cas, en résolvant le système $\mathbf{d} = \mathbf{M}\mathbf{p}$ pour \mathbf{p} par un algorithme des gradients conjugués. La solution de ce système a été arrêtée lorsque la norme relative du résidu était réduite de six ordres de grandeur. Vu le temps nécessaire à la reconstruction avec de tels préconditionneurs, les reconstructions correspondantes ont été arrêtées après 15 itérations pour l'approximation du hessien à zéro et à 2 pour le hessien au point courant.

Les courbes de convergence obtenues pour chaque préconditionneur sont représentées à la figure 4.11.

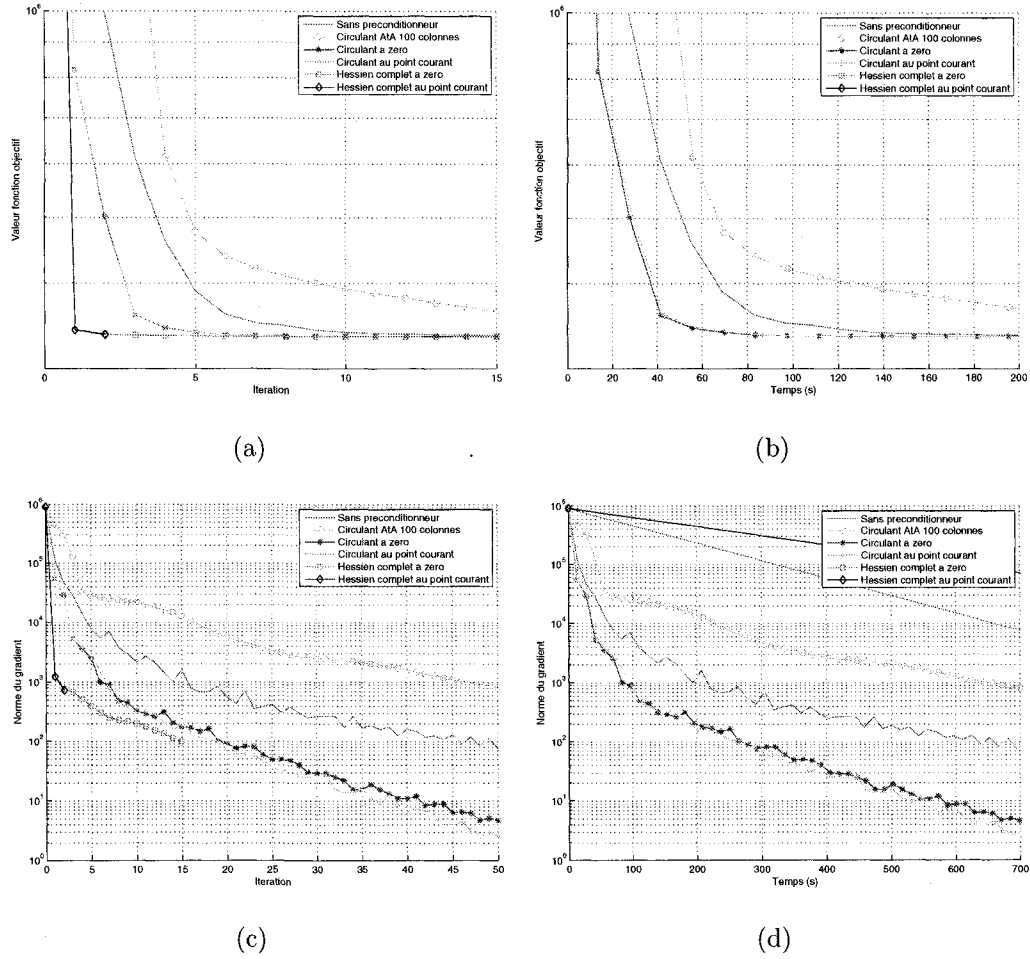


FIG. 4.11 Convergence du gradient conjugué pour la reconstruction régularisée par une fonction L_2L_1 avec $\lambda = 2$ de données simulées avec un RSB de 20 dB pour différences approximations circulantes du hessien. Valeur de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations 4.11(a) et du temps 4.11(b). Norme du gradient en fonction du nombre d'itérations 4.11(c) et du temps 4.11(d).

La première constatation concerne la convergence de la méthode lorsqu'on utilise seulement l'approximation circulante de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Cette approximation seule est peu représentative du hessien de la fonction lorsque le paramètre de régularisation $\lambda = 2$, de sorte qu'on observe un ralentissement de la convergence tant en fonction du nombre d'itérations que du temps. C'est le cas aussi lorsque $\lambda = 1$. Pour les critères moins fortement régularisés ($\lambda = 0, 1$ et $\lambda = 0, 2$), toutefois, l'approximation circulante de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ parvient à accélérer la convergence. Ainsi, plus le problème est fortement régularisé, plus il est nécessaire de tenir compte de la fonction de pénalisation de façon explicite.

Le préconditionnement par l'inverse du hessien au point courant ou à zéro entraîne une forte réduction de la fonction objectif et de la norme du gradient en fonction du nombre d'itérations. Le temps nécessaire à la complétion d'une itération avec ces préconditionneurs demande cependant plus de temps que les 50 itérations non préconditionnées.

Les deux approximations circulantes tenant compte de la fonction de pénalisation sont les seules qui réalisent un bon compromis entre réduction du nombre d'itérations et augmentation du temps de calcul à chaque itération de sorte qu'en bout de ligne on réduise plus rapidement la valeur de la fonction objectif et la norme du gradient.

Qu'on prenne une approximation circulante à zéro ou au point courant semble changer peu de chose à la vitesse de convergence. Pour la première itération, l'estimée initiale de l'objet étant nulle, les deux approximations sont nécessairement identiques. Par la suite, autant en fonction du nombre d'itérations que du temps, l'approximation circulante au point courant permet d'augmenter légèrement la vitesse de convergence.

Le temps nécessaire à l'évaluation de la direction préconditionnée pour l'approximation circulante au point courant est plus de trois fois celui que prend l'approximation circulante à zéro. Cependant, ces délais sont faibles par rapport au temps nécessaire pour compléter une itération de gradient conjugué. Ainsi, le léger gain en fonction du nombre d'itérations qu'apporte l'approximation circulante au point courant n'est pas annulé par le temps supplémentaire nécessaire à son évaluation. Cette approximation est alors la plus performante.

4.2.5 Évaluation du préconditionneur de Fessler et Booth

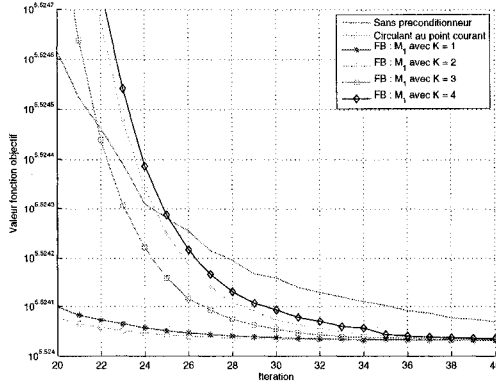
Nous comparons finalement notre mise en œuvre des préconditionneurs de Fessler & Booth (1999) à celle de notre préconditionneur circulant.

Les figures 4.12 et 4.13 montrent l'évolution de la valeur de la fonction objectif et de la norme du gradient pour la reconstruction de données simulées, avec un RSB de 20 dB, préconditionnée avec notre mise en œuvre des deux préconditionneurs de Fessler et Booth, \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 , décrits à la section 3.7.

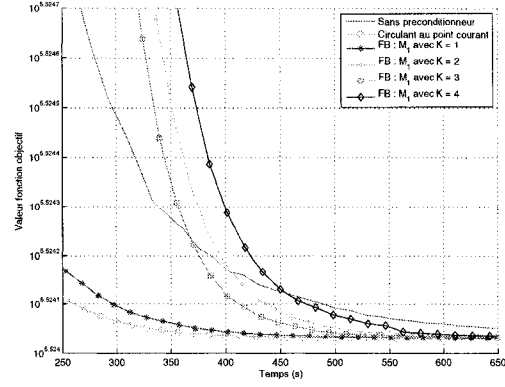
Nous avons cherché à illustrer l'effet du nombre K d'approximations circulantes utilisé et présentons les résultats obtenus avec $K \in [1, 2, 3, 10]$. Ces courbes sont comparées aux cas non préconditionné et préconditionné avec notre approximation circulante au point courant.

Pour la valeur de la fonction objectif, on présente la courbe en fonction du nombre d'itérations et en fonction du temps pour les itérations 25 à 50. Pour la norme du gradient, la courbe est représentée pour les 50 itérations effectuées.

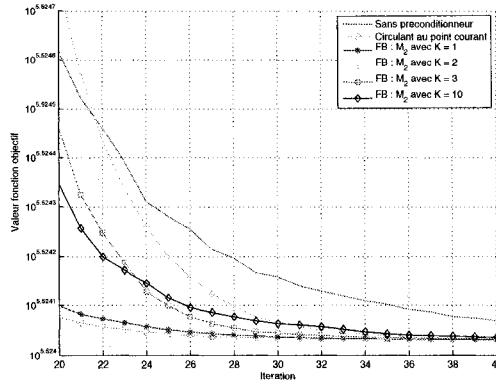
Nous nous attendions *a priori* à ce que l'augmentation du nombre K d'approximations circulantes résulte en une amélioration de l'approximation du hessien ainsi



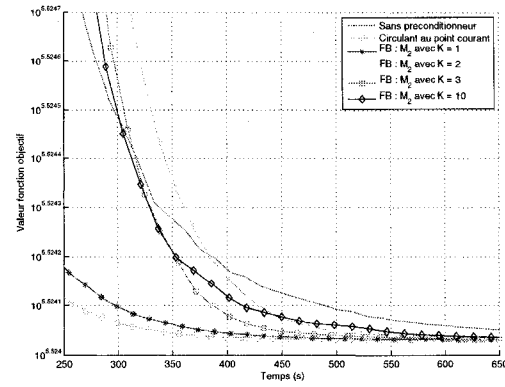
(a)



(b)

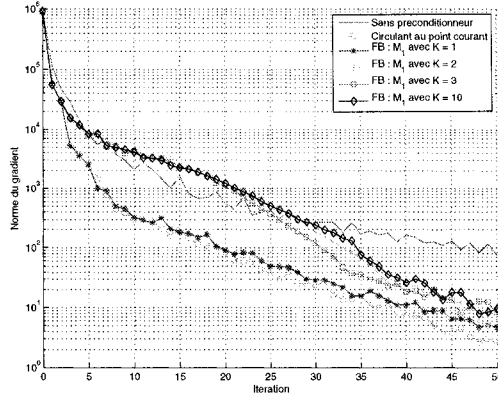


(c)

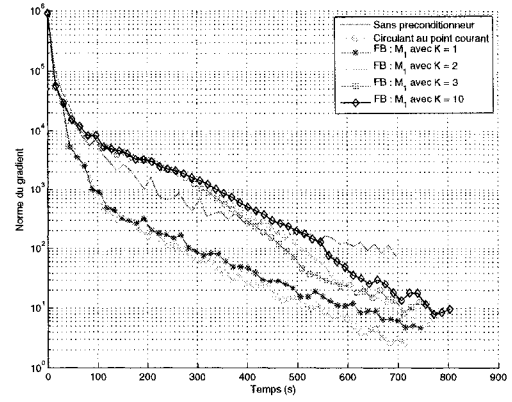


(d)

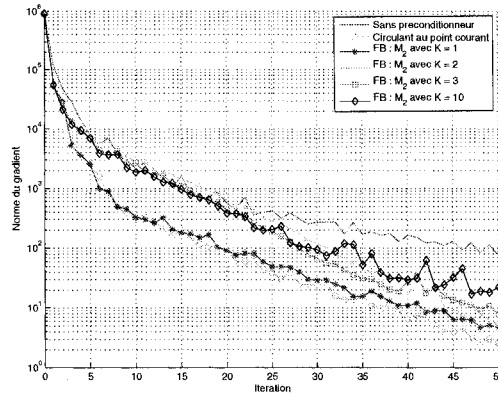
FIG. 4.12 Valeur de la fonction objectif pour la reconstruction préconditionnée à l'aide des deux préconditionneurs de Fessler et Booth, pour divers nombres K d'approximations circulantes, ainsi que sans préconditionnement et avec le préconditionneur circulant au point courant. 4.12(a) : \mathbf{M}_1 en fonction du nombre d'itérations. 4.12(b) : \mathbf{M}_1 en fonction du temps. 4.12(c) : \mathbf{M}_2 en fonction du nombre d'itérations. 4.12(d) : \mathbf{M}_2 en fonction du temps.



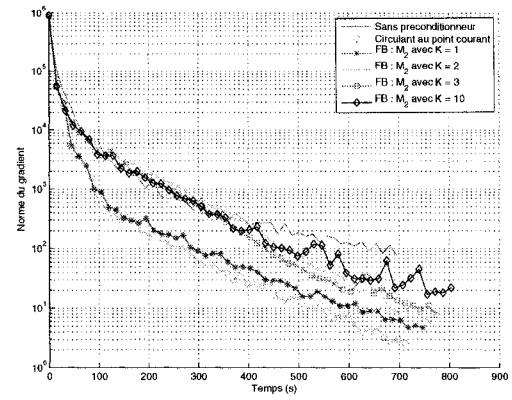
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 4.13 Norme du gradient pour la reconstruction préconditionnée à l'aide des deux préconditionneurs de Fessler et Booth, pour divers nombres K d'approximations circulantes, ainsi que sans préconditionnement et avec le préconditionneur circulant au point courant. 4.13(a) : \mathbf{M}_1 en fonction du nombre d'itérations. 4.13(b) : \mathbf{M}_1 en fonction du temps. 4.13(c) : \mathbf{M}_2 en fonction du nombre d'itérations. 4.13(d) : \mathbf{M}_2 en fonction du temps.

que de la convergence. Les résultats obtenus montrent cependant que tel n'est pas le cas. Pour les deux méthodes, il s'avère que $K = 1$ donne les meilleurs résultats, peu importe le niveau de bruit.

De plus, l'effet d'une variation de K ne suit pas une tendance monotone. En particulier, avec un RSB de 20 dB pour les deux approximations, l'utilisation de $K = 3$ approximations circulantes résulte en une moins bonne convergence que pour $K = 1$, mais en une meilleure que pour $K = 2$.

On note que lorsque $K = 1$, les deux préconditionneurs \mathbf{M}_1 et \mathbf{M}_2 sont identiques et constituent une approximation circulante du hessien. Ce qui différencie cette dernière de notre préconditionneur circulant est le choix de la valeur de η utilisée dans chaque cas.

On observe également que pour notre critère, avec un niveau de bruit de 20 dB, le fait de laisser tomber les termes croisés du préconditionneur \mathbf{M}_1 pour obtenir le préconditionneur \mathbf{M}_2 résulte, pour tous les nombres d'approximations circulantes, en une meilleure convergence. C'est en particulier ce qui se produit lorsque $K = 10$ dans le cas illustré. On ne peut cependant pas généraliser cette tendance à tous les niveaux de bruit. Pour 40 dB, par exemple, pour certaines valeurs de K , \mathbf{M}_1 est plus efficace, pour d'autres, c'est \mathbf{M}_2 .

Lorsqu'on compare les approximations de Fessler et Booth pour $K = 1$ à notre approximation circulante au point courant, on se rend compte qu'aucune ne se démarque vraiment des autres. Pour un RSB de 20 dB, notre approximation circulante s'avère légèrement plus efficace que celle de Fessler et Booth. Lorsque le RSB augmente à 40 dB, ce sont les approximations de Fessler et Booth qui sont légèrement plus efficaces.

4.2.6 Conclusion

Nous avons, dans cette partie, évalué empiriquement les méthodes de recherche linéaire présentées à la section 1.2.4. Nous avons constaté que pour les divers niveaux de bruit considérés, une seule itération de la méthode de Labat basée sur Geman et Reynolds permettait d'obtenir la convergence la plus rapide en fonction du temps.

Dans le cas non bruité, les deux méthodes de Labat donnent le pas optimal. Nous avons vu qu'au fil des itérations, la recherche linéaire de Moré-Thuente finissait par donner des longueurs de pas faisant davantage réduire la valeur de la fonction objectif que les méthodes de Labat, de sorte qu'elle finissait par les rattraper en fonction du nombre d'itérations, mais pas en fonction du temps. La méthode de Moré-Thuente prend plus de temps à rattraper les méthodes de Labat lorsque le niveau de bruit est bas, ces dernières donnant des pas plus près du pas optimal.

Nous avons ensuite comparé diverses approches de préconditionnement. De celles-ci, les approximations purement circulantes, c'est-à-dire nos approximations circulantes au point courant ou à zéro, ou l'approximation circulante obtenue de l'approche de Fessler et Booth, sont celles avec lesquelles les meilleurs résultats de convergence sont obtenus. Les résultats obtenus avec ces trois préconditionneurs sont très semblables et celle qui donne les meilleurs résultats varie d'un niveau de bruit à l'autre.

De ces analyses, nous posons alors l'hypothèse que, pour notre problème ne faisant pas intervenir la covariance du bruit de mesure, c'est-à-dire la matrice \mathbf{W} , une bonne approximation circulante est préférable aux approximations composées proposées par Fessler et Booth. Cette approche étant conçue pour tenir compte du caractère spatialement variant de la méthode de reconstruction lorsque \mathbf{W} n'est

pas proportionnelle à l'identité, il faudra la reconsidérer lorsqu'un modèle basé sur des statistiques de Poisson sera utilisé pour la reconstruction sous hypothèse polychromatique.

4.3 Capacité de reconstruction des données réelles

Les travaux que nous avons entrepris portent également sur la possibilité de reconstruire des images à partir de données médicales réelles. Ces dernières proviennent d'un appareil SOMATOM Sensation 16 installé à l'Hôpital Notre-Dame de Montréal. Cette section va permettre de valider l'atteinte de ce troisième et dernier objectif.

Nous verrons dans quel contexte ces données ont été acquises et comment elles sont reconstruites et comparées aux images reconstruites par Siemens.

Nous pourrons ensuite passer à l'évaluation de nos reconstructions par rapport à celles de Siemens. Nous observerons la résolution des images, la valeur du coefficient d'atténuation et le contraste des images.

Enfin, nous évaluerons l'effet des préconditionneurs et des méthodes de recherche linéaire sur les différents problèmes pour nous assurer que le comportement de ces dernières est analogue à ce qu'on a observé sur des données simulées.

4.3.1 Reconstruction d'une image à partir de données réelles

Les données dont nous nous servons pour la validation ont été acquises sur un fantôme *Catphan 600*. Les spécifications techniques détaillées peuvent être obtenues dans le manuel d'utilisation du fantôme (The Phantom Laboratory, 2006).

Ce fantôme est composé de cinq modules permettant d'évaluer divers paramètres du tomographe comme l'épaisseur de tranche, la détection de faibles contrastes ou la résolution spatiale des images. Nous nous sommes intéressé aux trois modules suivants :

1. CTP404 : Ce module permet de calibrer un nombre significatif de paramètres du tomographe. Nous l'utilisons pour comparer l'atténuation en HU de nos images à celle des images reconstruites par Siemens.
2. CTP528 : Ce module est constitué de séries de barrettes métalliques parallèles disposées sur un cercle. Les barrettes, d'abord une paire par centimètre, sont de plus en plus fines et rapprochées, jusqu'à atteindre 21 paires par centimètre. Ce module permet d'évaluer la résolution des images reconstruites.
3. CTP515 : Ce module est constitué d'objets de différentes tailles et de différentes épaisseurs et dont le coefficient d'atténuation est faiblement contrastant par rapport à celui du fond. Nous pourrions alors évaluer la détection de contraste avec nos méthodes par rapport à celle de Siemens.

La reconstruction de Siemens des trois tranches que nous utilisons pour nos évaluations est représentée aux figures 4.14(a), 4.14(b) et 4.14(c). Nous n'avons représenté qu'une région d'intérêt de 250 mm de côté de l'image de 500 mm afin de mieux visualiser l'objet. Le reste de l'image est nul.

Le tomographe utilisé fournit une série de protocoles pour différents types d'exams. Les données utilisées ont été acquises avec le protocole axial *SpineSeq L3-L4*, conçu pour l'imagerie de la colonne vertébrale. Nous énonçons quelques paramètres de ce protocole au tableau I.2, en annexe. Les détails concernant chaque protocole sont disponibles dans le manuel d'application de l'appareil (Siemens AG Medical Solutions, 2005a).

Les données d'examen sont emmagasinées dans des fichiers DICOM de format

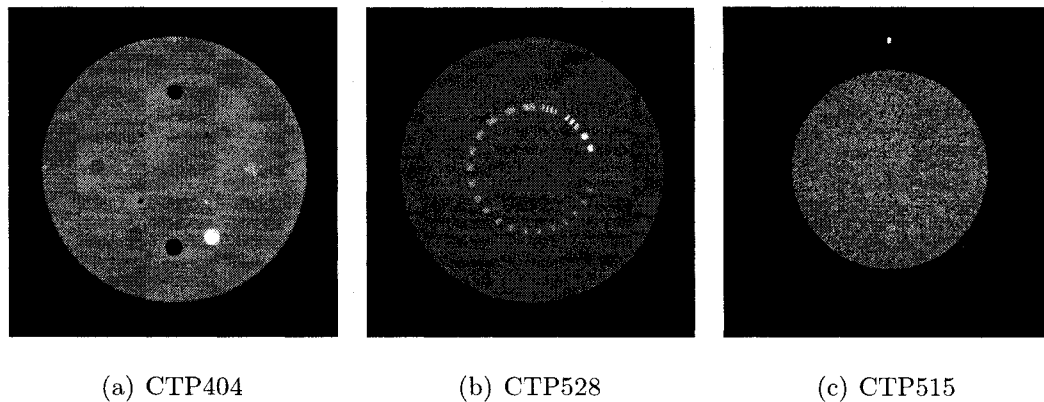


FIG. 4.14 Images reconstruites par Siemens pour les trois modules du fantôme *Catphan 600*. Les modules CTP404 et CTP528 ont été représentés sans effectuer de fenêtrage. Le module CTP515 est représenté sur une fenêtre allant de 0 HU à 100 HU.

propre à Siemens. Nous avons créé une série de programmes permettant de les lire et de convenablement les recaler afin de pouvoir utiliser la méthode proposée pour les reconstruire. Une description du format des données, de la manière de les lire et de les recaler est donnée à l'annexe I.

Dans le cas d'images médicales réelles, le choix du paramètre λ de régularisation n'est, en principe, pas aussi simple que dans le cas de données simulées. Cette difficulté provient du fait qu'on ne dispose pas d'une représentation exacte de l'objet imagé.

Nous avons donc privilégié une approche empirique où un jeu de données a été reconstruit avec divers paramètres de régularisation. Les images obtenues en utilisant $\lambda = 0,2$ concilient de manière acceptable le niveau de bruit et le lissage des discontinuités.

Nous avons illustré, à la figure 4.15, un extrait de 250 mm de côté des reconstructions du module CTP528 effectuées par Siemens ainsi que par nos méthodes avec

différentes valeurs de λ dont celle qu'on a choisie.

4.3.2 Comparaison de nos images et celles de Siemens

Les images reconstruites par Siemens sont emmagasinées dans des fichiers DICOM de format standard sous forme d'un tableau d'entiers non signés de 16 bits.

Les images qui y sont stockées sont en unités Hounsfield (HU). Les échantillons de l'image sont augmenté de 1024 de sorte qu'ils puissent être représentés par des entiers non signés.

Nos images sont comparées à celles de Siemens en unités Hounsfield. Ainsi, nos images du coefficient d'atténuation sont converties en unités Hounsfield et le décalage de 1024 appliqué aux images de Siemens est renversé. La prochaine section explique quelques particularités liées à la conversion de nos images en unités Hounsfield afin de pouvoir adéquatement les comparer à celles de Siemens.

4.3.2.1 Conversion des reconstructions en unités Hounsfield

Nous avons constaté que l'utilisation du coefficient d'atténuation de l'eau à 70 keV pour convertir nos images en unités Hounsfield résultent en des images à une échelle différente de celle des images de Siemens.

Nous avons alors cherché à estimer le coefficient d'atténuation de l'eau utilisé pour la conversion. Ceci a été fait en comparant l'image de Siemens en HU à notre reconstruction du coefficient d'atténuation μ .

L'idée générale est d'évaluer en chaque point de l'image le coefficient d'atténuation pour l'eau qui permettrait d'établir la correspondance entre les deux images, c'est-

à-dire évaluer, pour chaque échantillon de l'image, la quantité

$$\mu_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{\mu \times 1000}{HU + 1000}.$$

De cette image du coefficient d'atténuation pour l'eau, les composantes les plus entachées de bruit sont retranchées. Ces composantes correspondent typiquement à l'air entourant l'objet. On applique, pour cela, un seuil sur les valeurs HU de manière à conserver seulement celles qui sont au dessus de -500 HU. Cela, pour le fantôme *Catphan 600*, a permis de conserver l'objet seulement, mais complètement.

La valeur de $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$ est estimée en prenant la moyenne pour toutes les valeurs au-dessus du seuil. Leur variance est évaluée pour vérifier que la dispersion est faible, ce qui confère un niveau de confiance plus élevé en cette approche.

Ainsi, pour l'image du module CTP528, nous avons obtenu un coefficient d'atténuation de $0,1921 \text{ cm}^{-1}$. La variance sur cette valeur est de $6,338 \times 10^{-6}$. Cela correspond à une énergie de 72,46 keV. Le coefficient d'atténuation pour l'eau, à 70 keV, est plutôt de $0,1948 \text{ cm}^{-1}$. La mise à l'échelle de la reconstruction obtenue par nos méthodes est alors nécessaire pour pouvoir la comparer à celle obtenue par le tomographe.

4.3.3 Validation de la reconstruction

4.3.3.1 Résolution et niveau de bruit

Commençons par comparer visuellement la résolution et le niveau de bruit des reconstructions présentées à la figure 4.15 à celle de l'image de Siemens.

Sur la reconstruction effectuée par Siemens, on perçoit des détails des différentes barrettes jusqu'à la 7^e série (à partir de celle de plus grande taille). La même

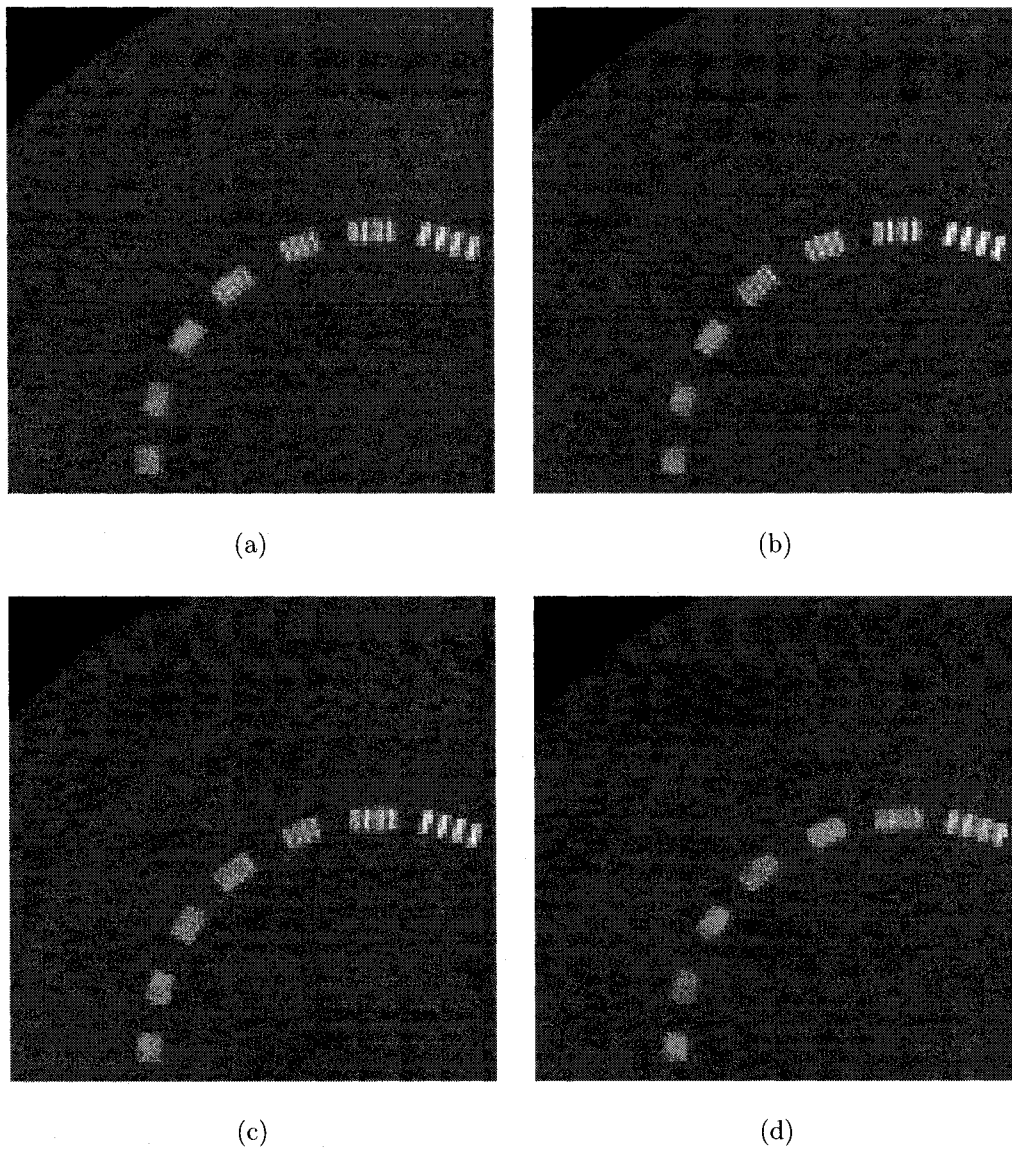
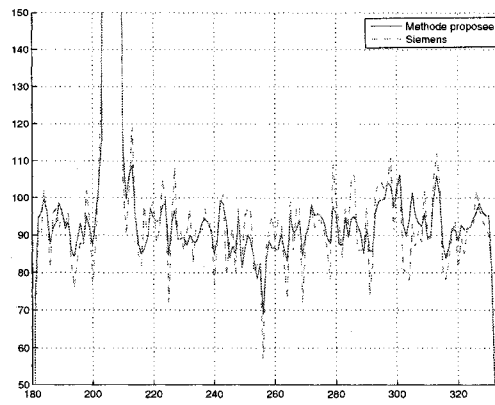
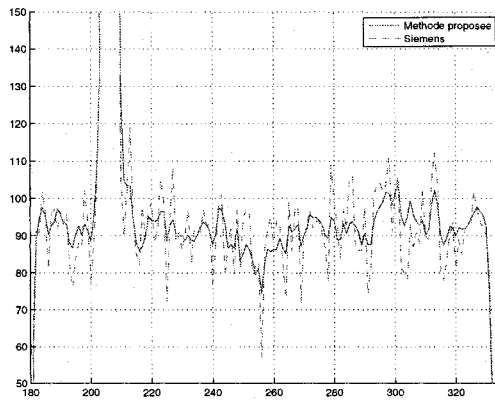


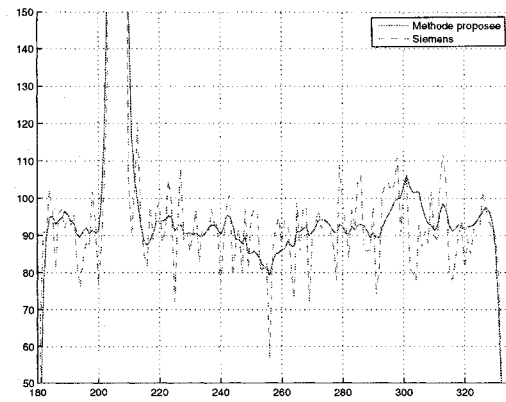
FIG. 4.15 Reconstructions du module CTP528 à partir de données réelles, avec des valeurs de λ de part et d'autre de 0,2. Les figures 4.15(b), 4.15(c) et 4.15(d), dans l'ordre, correspondent aux reconstructions avec $\lambda = 0,1$, 0,2 et 0,5. La série de barrettes la plus large représentée est la troisième du fantôme.



(a)



(b)



(c)

FIG. 4.16 Profil du coefficient d'atténuation en HU pour la colonne du centre du module CTP528 avec la méthode proposée et celle de Siemens. Les figures 4.16(a), 4.16(b) et 4.16(c), dans l'ordre, correspondent aux reconstructions avec $\lambda = 0,1$, $0,2$ et $0,5$.

constatation est faite pour la reconstruction avec $\lambda = 0,1$, cependant le niveau de détails paraît légèrement supérieur. Le même nombre de séries de barrettes est visible lorsque le paramètre de régularisation est fixé à 0,2. Le niveau de détail est cependant moindre de sorte qu'on ne discerne presque plus les barrettes de la 7^e série. Enfin, avec $\lambda = 0,5$, on ne voit à peine que 5 séries de barrettes.

Le niveau de bruit sur chacune des images est difficilement perceptible vu la fenêtre utilisée. Nous avons représenté, à la figure 4.16, une coupe des trois reconstructions, superposée à celle de Siemens. De manière prévisible, le niveau de bruit observé diminue à mesure que la régularisation est renforcée. De plus, le bruit perçu, même pour $\lambda = 0,1$, est inférieur à celui observé sur la reconstruction de Siemens, malgré le filtre de reconstruction soit-disant assez lisse utilisé. Ainsi, pour une résolution visuellement équivalente on réussit à obtenir des images moins bruitées.

4.3.3.2 Validation de la géométrie du décalage et de la source volante

Nous avons validé la modélisation et notre mise en œuvre des méthodes de projection et de rétroprojection impliquant un décalage du détecteur et une source volante angulaire. Cela ne pouvait être fait que sur des données réelles.

Ainsi, nous avons reconstruit l'image du module de résolution CTP528 pour les quatre combinaisons possibles d'utilisation de la source volante et du décalage du détecteur. Les images résultantes sont à la figure 4.17

En premier lieu, lorsqu'on omet de tenir compte du décalage du détecteur, ce dernier étant de $5/4$ d'une cellule de détecteur, les reconstructions sont très floues, ce qu'on observe sur la figure 4.17(b) par rapport à la figure 4.17(a).

De même, dans une moindre mesure cependant, la non-prise en compte de la source

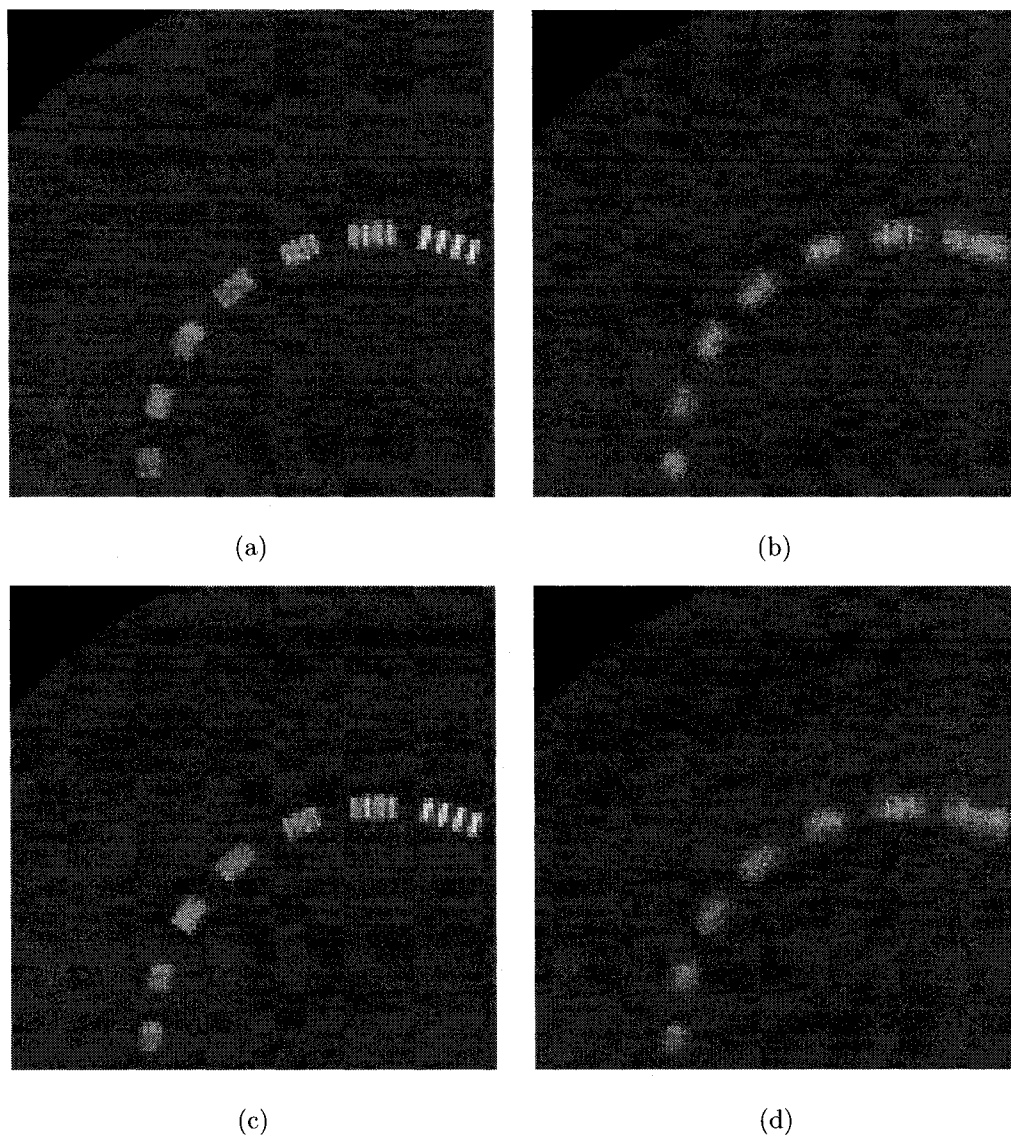


FIG. 4.17 Images reconstruites pour le module CTP528 avec décalage et source volante 4.17(a), sans décalage, avec source volante 4.17(b), avec décalage, sans source volante 4.17(c), sans décalage ni source volante 4.17(d).

volante résulte en des reconstructions moins précises. On observe cette dégradation en comparant les deux ou trois dernières séries de barrettes reconstruites à la figure 4.17(c) qui sont visiblement moins bien reconstruites que sur la figure 4.17(a).

La figure 4.17(d) représente finalement l'image obtenue lorsqu'on ne tient compte ni du décalage ni de la source volante. La dégradation causée par la non-prise en compte de la source volante est quasiment imperceptible par rapport à celle qui résulte de la non-prise en compte du décalage du détecteur.

4.3.3.3 Reconstruction du coefficient d'atténuation

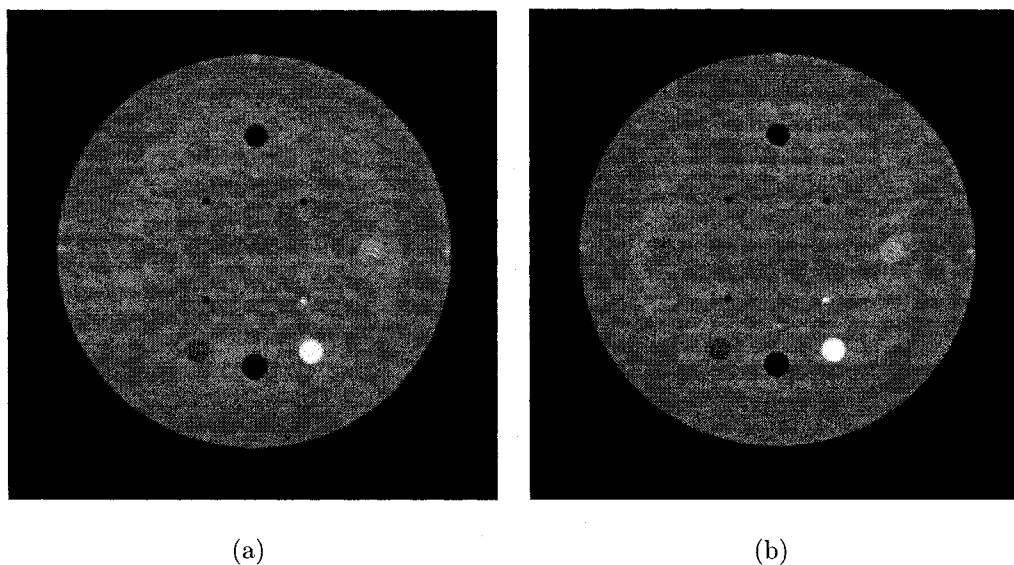


FIG. 4.18 Images du module CTP404 reconstruites par Siemens 4.18(a), et par nos méthodes 4.18(b).

La reconstruction de Siemens et la nôtre, pour le module CTP404, sont présentées à la figure 4.18. Elles sont visuellement semblables, mis à part le niveau de granularité supérieur de celle de Siemens (4.18(a)).

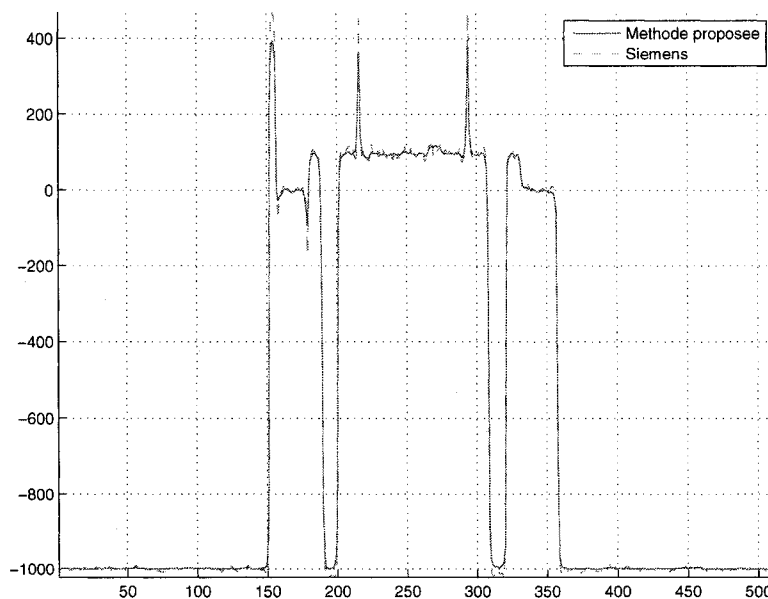


FIG. 4.19 Profil du coefficient d'atténuation en HU pour la colonne 258 de la reconstruction avec la méthode proposée et de celle de Siemens.

Pour différencier les deux images, nous avons tracé, à la figure 4.19, les coefficients d'atténuation sur la colonne 258 de l'image. Cette dernière passe au centre des cylindres d'air.

La première observation concerne le lissage des contours, qui est perceptible aux frontières entre les objets, en particulier au niveau des pointes, qui sont significativement arrondies.

Pour les deux images, les coefficients d'atténuation reconstruits sont très semblables pour les deux images, à une exception près, soit les cylindres constitués d'air. On s'attendrait à ce que le coefficient d'atténuation pour ces cylindres soit très près de -1000 HU, ce qui est la valeur associée au vide. On observe que notre méthode reconstruit correctement le coefficient d'atténuation de ces cylindres. Sur l'image de Siemens, cependant, on observe que l'atténuation se situe en dessous de -1000

HU, ce qui n'a physiquement pas de sens. Ce problème est vraisemblablement une conséquence du filtre de reconstruction utilisé, et ne se présente pas lors de la reconstruction avec le critère régularisé.

4.3.3.4 Détection de petits objets et de faibles contrastes

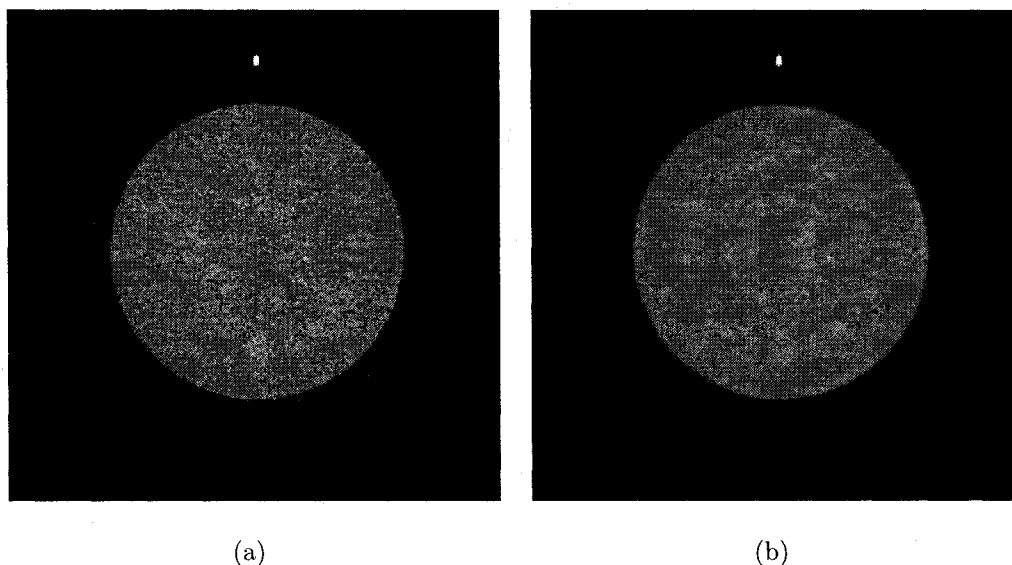


FIG. 4.20 Images du module CTP515 reconstruites par Siemens 4.20(a) et par nos méthodes 4.20(b).

Le module CTP515 est constitué de six séries de cylindres de taille, épaisseur et niveau de contraste différents. Les trois séries à l'extérieur correspondent à des cylindres de 40 mm d'épaisseur dont le diamètre va de 2 mm à 15 mm. Leur niveau de contraste est de 0,3 %, 0,5 % et 1 % par rapport au fond. Les trois séries à l'intérieur sont toutes formées du même matériau, contrastant à 1 % par rapport au fond. L'épaisseur des cylindres pour les trois séries varie et est respectivement de 3 mm, 5 mm et 7 mm.

Le manuel d'utilisation du fantôme *Catphan 600* (The Phantom Laboratory, 2006)

TAB. 4.5 Nombre de cylindres détectés et produit de la taille du plus petit cylindre détecté par son niveau de contraste pour les trois séries extérieures sur les images reconstruites par Siemens et par nos programmes.

Contraste	Cylindres Siemens	Produit	Cylindres nous	Produit
1%	7	$4 \times 1 = 4$	9	$2 \times 1 = 2$
0,5%	2	$9 \times 0,5 = 4,5$	7	$4 \times 0,5 = 2$
0,3%	0	—	4	$7 \times 0,3 = 2,1$

indique que le produit du niveau de contraste et de la taille est constant. Plus faible est cette constante, plus faibles sont les contrastes et plus petits sont les objets qu'il est possible de détecter.

Nous avons représenté, à la figure 4.20, les images reconstruites par Siemens (4.20(a)) et par nos programmes (4.20(b)). La fenêtre utilisée va de 0 HU à 100 HU. Le fond est mesuré à environ 50 HU.

Nous présentons, dans le tableau 4.5, le nombre de cylindres perçus pour chaque niveau de contraste (séries à l'extérieur) et la valeur du produit du diamètre du plus petit cylindre perçu par son niveau de contraste pour la reconstruction de Siemens et la nôtre.

Le rapport des constantes pour les deux cas est d'environ 2. Sur notre reconstruction, on arrive donc à détecter des objets, soit deux fois plus petits, soit deux fois moins contrastants que sur celle de Siemens. Rappelons que nous avons choisi le paramètre de régularisation de manière empirique en nous basant sur une appréciation visuelle de l'image. Un paramètre de régularisation différent conduirait à des résultats différents.

Pour les trois séries internes, sur l'image de Siemens, on discerne, très peu cependant, les séries de 7 mm et de 5 mm d'épaisseur, mais pas du tout celle de 3 mm. Sur nos reconstructions, toutefois, les trois séries sont perceptibles, mais la plus fine l'est moins que les deux autres. En particulier, on n'arrive pas à percevoir le plus petit cylindre de cette série. L'épaisseur de tranche étant de 1,5 mm, et la tranche étant à peu près centrée (ce qu'indique le point blanc en haut de l'image), on se serait attendu à voir les trois séries de manière identique.

Cette disparition peut s'expliquer par l'épaisseur de tranche qui, ailleurs qu'à l'isocentre, est inférieure à 1,5 mm pour la moitié des projections et supérieure à 1,5 mm pour l'autre moitié, les mesures étant réalisées sur des rayons formant un cône.

De plus, le centre de l'acquisition a été aligné sur le point blanc qu'on aperçoit en haut des images, indiquant le centre du module. Puisqu'un nombre pair d'images a été reconstruit, il y en a une de part et d'autre du centre, mais aucune qui soit véritablement centrée.

Comme la série de cylindres la plus mince est de 3 mm d'épaisseur, un certain nombre de rayons, qui devraient normalement les traverser dans un cas purement bidimensionnel, passent à côté.

4.3.4 Convergence de la reconstruction de données réelles

Nous nous sommes assuré que la convergence des méthodes appliquées à la reconstruction de données réelles donnait des résultats semblables à ceux obtenus pour la reconstruction de données simulées.

Nous avons premièrement vérifié qu'une itération de la recherche linéaire de Labat permettait toujours d'obtenir la meilleure convergence.

Autant dans le cas non préconditionné que dans le cas préconditionné avec une approximation circulante à zéro ou au point courant, une seule itération de la méthode basée sur Geman et Reynolds résulte en la convergence la plus rapide.

En particulier, dans le cas préconditionné avec l'approximation circulante à zéro ou au point courant, la méthode de Moré-Thuente effectue un plus grand nombre d'itérations avant de générer un pas satisfaisant les conditions de Wolfe fortes. Cette méthode prend ainsi beaucoup plus de temps que les méthodes de Labat.

Enfin, le préconditionnement avec une approximation purement circulante permet de faire décroître le plus rapidement la valeur de la fonction objectif et la norme de son gradient. Notre approximation circulante au point courant fait diminuer la valeur de la fonction objectif légèrement plus rapidement que notre approximation à zéro et que l'approximation circulante de Fessler et Booth.

4.3.5 Conclusion

L'acquisition de données avec le fantôme *Catphan 600* a permis de valider différents aspects de la reconstruction d'image. On arrive à reconstruire des images qui nous semblent visuellement de meilleure qualité que celles qu'on reconstruit avec les méthodes traditionnelles, au prix, cependant, d'un temps de reconstruction de beaucoup supérieur.

Les méthodes empiriques proposées pour la détermination du paramètre de régularisation et la mise à l'échelle permettent d'obtenir des images pouvant être comparées à celles de Siemens.

Le modèle proposé pour tenir compte du décalage du détecteur et de la source volante angulaire est approprié pour la reconstruction des données réelles. Ne pas

en tenir compte résulte en des images de très mauvaise qualité.

Nous avons vérifié que la méthode de recherche linéaire de Labat, basée sur la méthode de Geman et Reynolds, est toujours celle qui est la plus adaptée à la reconstruction préconditionnée de données réelles.

Enfin, nous avons observé que, des deux approximations circulantes du hessien du critère régularisé, aucune n'est clairement préférable à l'autre et que la plus performante est vraisemblablement dépendante du niveau de bruit des données.

Enfin, les approximations de Fessler et Booth les plus adaptées à la reconstruction de données réelles sont toujours celles pour lesquelles on ne prend qu'une seule approximation circulante. Le préconditionneur obtenu ne permet pas de faire converger les méthodes itératives plus rapidement qu'avec notre approximation circulante.

CONCLUSION

L'objectif de ce travail était de mettre en œuvre des outils permettant la reconstruction d'images de taille médicale en tomographie à rayons X. Ces outils sont développés dans le cadre des méthodes algébriques de reconstruction et nécessitent le recours à des méthodes itératives de minimisation.

Nous avons premièrement mis en œuvre une méthode de stockage efficace pour la matrice de projection. La structure développée à cet égard permet de tenir compte des particularités géométriques des tomographes SOMATOM Sensation 16 et 64 de Siemens, dont le décalage du détecteur et de la source volante angulaire. L'utilisation explicite d'une matrice pour réaliser les opérations de projection et de rétroprojection permet une augmentation significative de leur performance.

L'utilisation des méthodes de recherche linéaire proposées par Labat ont également permis d'accélérer la convergence des méthodes itératives par rapport à la recherche linéaire générale de Moré-Thuente. La méthode basée sur la construction de Geman et Reynolds permet d'obtenir des longueurs de pas significativement meilleures en effectuant moins de travail.

Les méthodes de reconstruction ont pu être davantage accélérées par la création d'une méthode de préconditionnement adaptée à la structure du problème. La théorie de la reconstruction tomographique en dimensions infinie s'exprime dans le domaine de Fourier d'une façon qui rend élégante l'utilisation d'approximations circulantes à titre de préconditionneurs.

Ces approches ont permis de développer une approximation du hessien du critère de telle sorte que le produit d'un vecteur par son inverse soit peu coûteux à la fois en espace mémoire et en temps de calcul. On obtient ainsi une réduction plus

rapide de la valeur de la fonction objectif tant en fonction du nombre d'itérations qu'en fonction du temps.

Nous avons confronté notre approximation circulante aux approximations proposées par Fessler et Booth, qui composent une approximation de l'inverse du hessien à partir de plusieurs approximations circulantes. Les meilleurs résultats ont été obtenus avec le cas simplifié pour lequel une seule approximation circulante était utilisée. Comme cette dernière est purement circulante, les résultats obtenus sont semblables à ceux que nous obtenons avec nos approximations.

Le préconditionneur de Fessler et Booth n'a cependant pas été évalué pour ce pourquoi il est conçu à la base, c'est-à-dire la prise en compte du caractère spatialement invariant d'un critère faisant intervenir l'inverse de la matrice de covariance du bruit \mathbf{W} .

Toutes ces méthodes assemblées forment une méthode de reconstruction permettant de reconstruire des images à partir de données réelles dont la qualité est nettement meilleure que celles obtenues à partir de la méthode des rétroprojections filtrées employée dans les tomographes commerciaux. Cette amélioration est cependant obtenue au prix de reconstructions demandant beaucoup plus de mémoire et de temps de calcul.

L'originalité de ces travaux a surtout trait au fait que nous emmagasinons explicitement la matrice de projection. Dans la littérature, les modèles sont souvent basés sur des matrices de projection, certes, mais il n'est nullement fait mention de leur stockage, ce qui est un aspect non négligeable.

Rappelons qu'à terme, le travail en cours permettra de réduire les artefacts métalliques et de durcissement de rayon. Cette réduction passe par l'utilisation d'un modèle tenant compte du caractère polychromatique de la source de rayons X

tel celui qui est présenté dans Menvielle (2004). Le critère correspondant est non quadratique. Les méthodes de recherche linéaire et de préconditionnement devront alors vraisemblablement être adaptées à ce nouveau contexte.

Nous visons également la reconstruction de volumes de données provenant de séquences d'acquisition hélicoïdales. La reconstruction dans ce contexte est effectuée en considérant tout le volume de données et non plus seulement des tranches séparées. La matrice de projection correspondante est de taille beaucoup plus élevée que la matrice, déjà de grande taille, que nous avons considérée ici. Des travaux à ce sujet sont présentement en cours.

Enfin, les méthodes itératives n'arrivent jamais exactement à la solution en raison de la précision machine qui est finie et du temps nécessaire à l'atteinte de cette précision. Les méthodes doivent alors être arrêtées lorsqu'un compromis suffisant entre la qualité de la solution et le temps consacré à son obtention est atteint. Le moment précis auquel ce compromis est atteint n'est pas déterminé et mérite qu'on y réfléchisse puisqu'un trop grand nombre d'itérations implique d'effectuer un travail inutile. À l'opposé, un trop faible nombre d'itérations peut occasionner un diagnostic moins fiable.

RÉFÉRENCES

- ALLAIN, M. (2002). *Approche pénalisée en tomographie hélicoïdale en vue de l'application à la conception d'une prothèse personnalisée du genou*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Québec, Canada.
- BARRETT, R., BERRY, M., CHAN, T. F., DEMMEL, J., DONATO, J., DONGARRA, J., ELJKHOUT, V., POZO, R., ROMINE, C., AND DER VORST, H. V. (1994). *Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods*, (2^e éd.). Philadelphia, PA. : SIAM
- CHEN, K. (2005). *Matrix Preconditioning Techniques and Applications*. Cambridge : University Press.
- DE MAN, B. et al. (2001). An iterative maximum-likelihood polychromatic algorithm for CT. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(10), 999–1008.
- ELBAKRI, I. A. AND FESSLER, J. A. (2002). Statistical image reconstruction for polyenergetic x-ray computed tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(2), 89–99.
- FESSLER, J. AND BOOTH, S. (1999). Conjugate-gradient preconditioning methods for shift-variant pet image reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(5), 688–699.
- FLOHR, T. G., STIERSTORFER, K., ULZHEIMER, S., BRUDER, H., PRIMAK, A. N., AND MCCOLLOUGH, C. H. (2005). Image reconstruction and image quality evaluation for a 64-slice ct scanner with z-flying focal spot. *Medical Physics*, 32(8), 2536–2547.
- GRANGEAT, P. (2002). *La Tomographie*. Lavoisier.
- IDIER, J., (2001). *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. Lavoisier.

- KACHELRIESS, M., KNAUP, M., PENSSSEL, C., AND KALENDER, W. A. (2004). Flying focal spot (FFS) in cone-beam CT. *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, 6, 3759 – 3763.
- KACHELRIESS, M., KNAUP, M., PENSSSEL, C., and KALENDER, W. A. (2006). Flying focal spot (FFS) in cone-beam CT. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 53(3), 1238 – 1247.
- KAK, A. C. AND SLANEY, M. (1988). *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE.
- KALENDER, W. A. (2005). *Computed Tomography*. Erlangen, Germany : Publicis Corporate Publisher.
- LABAT, C. AND IDIER, J. (2005). Preconditioned conjugate gradient without linesearch : A comparison with the half-quadratic approach for edge-preserving image restoration.
- LABAT, C. and IDIER, J. (2006). Preconditioned conjugate gradient without linesearch : A comparison with the half-quadratic approach for edge-preserving image restoration. *Computational Imaging IV. Proceedings of the SPIE*, 6065, 134-143.
- LÉTOURNEAU-GUILLON, L. et al. (2004). CT and MR imaging of nitinol stents with radiopaque distal markers. *Journal of vascular and interventional radiology : JVIR*, 15(6), 615–624.
- MACOVSKI, A. A. (1983). *Medical Imaging Systems*. Prentice-Hall.
- MENVIELLE, N. (2004). Réduction des artéfacts métalliques en tomographie à rayons X. Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Québec, Canada.
- MORÉ, J. J. and THUENTE, D. J. (1994). Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease. *ACM Trans. Math. Softw.*, 20(3), 286–307.

NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY (NIST) (1996). *Tables of x-ray mass attenuation coefficients and mass energy-absorption coefficients*. Consulté le 13 juillet 2006, tiré de <http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/cover.html>

NOBELPRIZE.ORG (2007). *The nobel prize in physiology or medicine 1979*. Consulté le 18 novembre 2007, tiré de http://nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1979/

NOCÉDAL, J. AND WRIGHT, S. J. (1999). *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research.

ORBAN, D. (2007). *Numerical methods for nonlinear optimization and control*.

SAAD, Y. (1994). *SPARSKIT : a basic tool kit for sparse matrix computations*.

SIEMENS AG MEDICAL SOLUTIONS (2005a). *Somatom sensation 10/16 application guide*.

Siemens AG Medical Solutions (2005b). *Somatom sensation 40/64 application guide*.

STATISTIQUES CANADA (2005). *Principales causes de décès sélectionnées, selon le sexe*. Statistiques Canada. Consulté le 3 juillet 2007, tiré de <http://www40.statcan.ca/102/cst01/health36.f.htm#di=d%E9c%E8s>.

THE MATHWORKS, INC. (2007). *MATLAB Data :: Calling C and Fortran Programs from MATLAB (External Interfaces)*. Consulté le 22 mars 2007, tiré de http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/matlab_external/f21585.html#f47606.

THE PHANTOM LABORATORY (2006). *Catphan® 500 and 600 manual*.

ANNEXE I

PARAMÈTRES DES APPAREILS SOMATOM SENSATION 16 ET 64 POUR L'ACQUISITION ET LA RECONSTRUCTION DE DONNÉES RÉELLES

Les appareils avec lesquels ont été acquises les données se trouvent au Centre hospitalier de l'Université de Montréal (CHUM)-Notre-Dame. Les deux modèles utilisés sont les SOMATOM Sensation 16 et 64.

I.1 Paramètres géométriques

Les paramètres géométriques de base des deux appareils se retrouvent dans le tableau I.1.

I.2 Protocole d'acquisition

Le tableau I.2 contient la valeur de quelques paramètres importants du protocole *SpineSeq L3-L4*. Plus de détails peuvent être obtenus dans le manuel d'application de chaque appareil (Siemens AG Medical Solutions, 2005a) et (Siemens AG Medical Solutions, 2005b).

TAB. I.1 Paramètres géométriques des tomographes SOMATOM Sensation 16 et 64 de Siemens.

Paramètre	Valeur
Rayon de l'orbite du tube radiogène	$R_F = 570 \text{ mm}$
Rayon de l'orbite du détecteur	$R_D = 470 \text{ mm}$
Incrément angulaire entre les détecteurs	$\Delta\theta_f = 2\pi/4640$
Nombre de détecteurs	$N_d = 672$
Taille maximale du champ imagé	500 mm
Détecteur central sans source volante angulaire	335.25
Détecteur central avec source volante angulaire	335.625 ou 335.125
Incrément angulaire de la position du tube sans source volante angulaire	$\Delta\theta_s = 2\pi/1160$
Incrément angulaire de la position du tube avec source volante angulaire	$\Delta\theta_s = 2\pi/2320$
Angle de déviation de la source volante angulaire	$\Delta\alpha = \frac{1}{4} \frac{R_{FD}}{R_D} \Delta\theta_f$

I.3 Format des données brutes de Siemens

Les données brutes sont encapsulées dans un fichier DICOM dans un format propre à Siemens. Ce fichier débute par une série d'en-têtes permettant de connaître les paramètres d'acquisition des données.

De manière très sommaire, les données sont divisées en acquisitions. Pour un examen hélicoïdal, la table avance de manière continue et il n'y a qu'une acquisition. Pour un examen axial, une séquence d'acquisitions est effectuée. La table est déplacée entre chaque acquisition et est immobile durant celle-ci.

TAB. I.2 Paramètres importants du protocole *SpineSeq L3-L4* des tomographes SOMATOM Sensation 16 et 64 de Siemens.

Paramètre	Sensation 16	Sensation 64
Épaisseur de la tranche imagée	1,5 mm	2,4 mm
Épaisseur de la tranche acquise	0,75 mm	1,2 mm
Nombre de barrettes utilisées	12	24
Diamètre de la région imagée	500 mm	500 mm
Filtre de reconstruction	B31s	B31s

À chacune de ces acquisitions correspond une série de trames de données. Une trame correspond à une lecture du système de détection. Il y en a ainsi une pour chaque point de source volante et pour chaque position du tube radiogène. Chaque trame est précédée d'un en-tête permettant de connaître, entre autres, l'angle du tube et la position de la table auxquels elle correspond. À titre d'exemple, les données obtenues pour une acquisition axiale au cours de laquelle le tube radiogène parcourt 1160 positions angulaires et pour laquelle la source volante angulaire est utilisée contiennent 2320 trames de données.

Enfin, le nombre d'échantillons d'une trame est le produit du nombre de barrettes utilisées pour l'examen et du nombre de cellules de détection sur chacune d'elles. Ces nombres peuvent être obtenus dans les en-têtes des données. Les échantillons sont représentés par des entiers de 16 bits contenant les valeurs

$$p_S = -2294,5 \ln \left(\frac{I}{I_0} \right).$$

L'indice S vient distinguer les données de Siemens de celles que nous générons par simulation, leur définition n'étant pas tout à fait identique.

Le détecteur étant un collecteur d'énergie plutôt qu'un détecteur de photons, ces

données diffèrent également légèrement de notre modèle de formation des données en ceci qu'elles expriment le rapport de l'intensité détectée I à l'intensité émise I_0 . Sous l'hypothèse d'une source monochromatique, cela ne change strictement rien, le rapport des énergies étant identique au rapport des nombres de photons.

I.4 Recalage des données brutes avant la reconstruction

Nous expliquons ici les traitements qui doivent être faits aux données brutes avant de pouvoir les reconstruire avec nos programmes.

La première étape consiste à identifier l'image à reconstruire. Cela est fait en parcourant une à une les images reconstruites par Siemens. Le programme `dicomread` fourni avec l'*Image Processing Toolbox* de Matlab permet de lire les fichiers image. L'indice de l'image ainsi que sa position dans l'espace, qui est inscrite dans le fichier, doivent être relevés.

Le fichier de données contient les mesures effectuées pour tout l'examen. Il faut alors, pour une image donnée, repérer les données qui correspondent à l'image à reconstruire. Nous pouvons retrouver la séquence d'acquisition à partir de l'indice de l'image, puisqu'on connaît le nombre de tranches par séquence, en lisant les en-têtes du fichier. Une fois la séquence identifiée, les données lui correspondant peuvent être lues.

Le nombre de barrettes utilisées pour les mesures par rapport au nombre d'images reconstruites par séquence permet de déterminer le nombre de barrettes à fusionner avant de reconstruire l'image. L'indice de l'image permet alors de connaître les barrettes correspondantes. Ainsi, on extrait les données pour ces barrettes et on les fusionne pour créer le sinogramme. Pour un examen avec le protocole *SpineSeq L3-L4*, par exemple, nous devons opérer la fusion de deux barrettes pour obtenir

ce sinogramme.

Nous avons constaté, lors du traitement des données, que, pour une séquence d'acquisition, la position angulaire initiale du tube pouvait être aux alentours de n'importe quel multiple entier de $\pi/4$. De plus, l'acquisition des mesures peut commencer une ou deux positions angulaires avant ou après cette position initiale, de là l'utilisation de « aux alentours ». La matrice de projection a été conçue pour des sinogrammes débutant exactement à l'angle 0. Il faut alors effectuer une rotation des données de manière à suivre cette convention.

Enfin, comme les données de Siemens sont représentés par des entiers de 16 bits et qu'un facteur d'échelle (2294,5) est appliqué à ces dernières, nous devons appliquer la mise à l'échelle inverse et convertir les données au format double. Elles sont ensuite prêtes à être reconstruites.

ANNEXE II

CRITÈRE, GRADIENT, HESSIEN

Nous exposons ici l'expression du critère, de son gradient et de son hessien.

Le modèle de formation des données est considéré suivant une distribution normale de variance σ_B^2 :

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mu + \mathcal{N}\{0, \sigma_B^2\}.$$

La reconstruction des images est effectuée en minimisant le critère des moindres carrés régularisés :

$$C(\mu) = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu)^T(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu) + \lambda R(\mu).$$

Le terme de régularisation pénalise le module de la solution ainsi que les différences de premier et de second ordre, et s'énonce comme suit :

$$R(\mu) = \sum_{m=0}^M \sum_{j=1}^J \psi \left(w_m [\mathbf{D}^{(m)}\mu]_j \right).$$

La fonction $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ représente la fonction de pénalisation. Dans notre cas, nous utilisons une branche d'hyperbole :

$$\psi(t) = \sqrt{t^2 + \delta^2} - \delta.$$

Le paramètre δ détermine la vitesse de la transition entre le comportement quadratique et le comportement linéaire de la fonction.

Nous pénalisons d'abord la valeur de l'estimée ($m = 0$). Cela fait en sorte que la fonction objectif possède un minimum unique. Pour ce cas particulier, nous avons $w_0 = 1$ et $\mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{I}$.

Nous pénalisons également les différences d'ordre 1, c'est-à-dire entre un échantillon et son voisin vertical en haut ($m = 1$) et horizontal à droite ($m = 2$). La distance entre ces voisins est d'un seul échantillon, alors ici aussi $w_1 = w_2 = 1$.

Enfin, nous pénalisons les différences d'ordre deux, c'est-à-dire entre un échantillon et son voisin en haut à droite ($m = 3$) et en bas à droite ($m = 4$), et on a $w_3 = w_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Le gradient de la fonction objectif s'exprime comme suit :

$$\nabla C(\mu) = -\mathbf{A}^T(\mathbf{p} - \mathbf{A}\mu) + \lambda \nabla R(\mu),$$

avec

$$\nabla R(\mu) = \lambda \sum_{m=0}^M w_m (\mathbf{D}^{(m)})^T \sum_{j=1}^J \psi' \left(w_m [\mathbf{D}^{(m)} \mu]_j \right) \mathbf{e}_j.$$

Pour la branche d'hyperbole, on a

$$\psi'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \delta^2}}.$$

Enfin, l'expression du hessien est la suivante :

$$\nabla^2 C(\mu) = \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \nabla^2 R(\mu),$$

avec

$$\nabla^2 R(\mu) = \sum_{m=0}^M w_m^2 (\mathbf{D}^{(m)})^T \text{diag} \left\{ \psi'' \left(w_m [\mathbf{D}^{(m)} \mu]_j \right) \right\} \mathbf{D}^{(m)}$$

et

$$\psi''(t) = \frac{\delta^2}{(t^2 + \delta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

ANNEXE III

STRUCTURES EN LANGAGE C POUR LA MATRICE DE PROJECTION

La matrice de projection est emmagasinée dans une structure `ProjMat` énoncée au listing III.1. Elle est constituée d'un vecteur `Blocks` dont chacune des composantes correspond à une ligne emmagasinée. Ces lignes sont stockées sous forme de blocs, tel que décrit à la section 2.5. Chacun de ces blocs est représenté par une structure `ProjMatBlock` énoncée au listing III.2.

La structure `ProjMat` est constituée de plusieurs champs nécessaires à la réalisation des opérations de produit de vecteurs par la matrice.

Le nombre de projections pour lesquelles on emmagasine les lignes, le nombre N_d de détecteurs et le nombre N_{fs} de points de source virtuels est indiqué par les champs `nProjections`, `nDetectors` et `nFocalSpots` respectivement.

Ces champs sont utiles afin d'identifier à quelles lignes redondantes correspond chaque ligne emmagasinée. Ils permettent également de connaître le nombre de blocs emmagasinés et le nombre total de lignes de la matrice.

La largeur N_c et la hauteur N_r de chacun des blocs correspondent à la taille de l'image reconstruite et sont représentées par les variables `BlockWidth` et `BlockHeight`.

Enfin, les transformations par rapport auxquelles le système géométrique correspondant à la matrice sont invariantes sont indiquées par le champ `Transformations`.

```

struct ProjMat
{ enumProjMatTransformations Transformations;

    unsigned short nProjections;
    unsigned short nDetectors;
    unsigned short nFocalSpots;

    unsigned short BlockWidth;
    unsigned short BlockHeight;

    struct ProjMatBlock *Blocks;
};

```

Listing III.1: Structure pour le stockage de la matrice de projection.

Nous avons vu deux structures pour le stockage des blocs, soit à segments de longueur fixe et à segments de longueur variable. La structure énoncée au listing III.2 correspond à des segments de longueur variable.

Dans les deux cas, cependant, les champs **FirstRow** et **LastRow** indiquent respectivement les indices de la première et de la dernière ligne non vides du bloc.

Pour des segments de longueur variable, les deux tableaux d'entiers **RowBeg** et **RowEnd**, de longueur $\text{LastRow} - \text{FirstRow} + 1$, contiennent, pour chaque ligne non vide, l'indice de la première et de la dernière composante non nulle.

Pour des segments de longueur fixe, seul le tableau **RowBeg** est présent. Un champ entier **RowLength** est ajouté et représente la longueur des segments.

Les coefficients sont enfin emmagasinés dans le vecteur **Values** pour les deux méthodes.

```
struct ProjMatBlock
{ unsigned short FirstRow;
  unsigned short LastRow;
  unsigned short *RowBeg;
  unsigned short *RowEnd;

  double *Values;
};
```

Listing III.2: Structure pour le stockage d'une ligne de la matrice de projection.